Le rang d'une matrice

Énoncé Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, par exemple, $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ etc..

Théorème Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice. Il existe matrices $P \in GL_m(\mathbb{K})$, $Q \in GL_n(\mathbb{K})$ et un unique $r \in \mathbb{N}$ avec $r \leq \min\{m, n\}$ tels que

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

Le nombre r s'appelle le **rang** de la matrice A et noté par $\operatorname{rang} A$ ou $\operatorname{rg} A$. $\square$

Preuve du théorème

1$^{\text{ère}}$ étape Montrons que les matrices P et Q du théorème existent.

Le cas où $A = 0_{m,n}$, il n'y a rien à montrer ! D'ici, on suppose que $A \neq 0_{m,n}$.
i) Dans ce cas, au moins, il y existe un couple (i, j) tel que $a_{i,j} \neq 0$.
Permutant les 1$^{\text{ère}}$ et i-ème lignes et les 1$^{\text{ère}}$ et j-ème colonnes, on obtient une matrice $A' = (a'_{i,j})$ avec $a'_{1,1} \neq 0$. Multipliant $(a'_{1,1})^{-1}$ sur la 1$^{\text{ère}}$ ligne (ou colonne), on peut supposer que $a'_{1,1} = 1$. Ajoutant $-a_{i,1} \times$ (la 1$^{\text{ère}}$ ligne) sur la i-ème ligne ($1 < i \leq m$) et $-a_{1,j} \times$ (la 1$^{\text{ère}}$ colonne) sur la j-ème colonne ($1 < j \leq n$), on obtient une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{m-1,1} & A_1 \end{pmatrix}$ où $A_1 \in M_{m-1,n-1}(\mathbb{K})$.
Rappelons que le `pivot de Gauss` sur lignes (sur colonnes, resp.) correspondent aux multiplications de matrices inversibles à gauche (à droite, resp.), il existe matrices $P_1 \in GL_m(\mathbb{K})$ et $Q_1 \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que

$$P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{m-1,1} & A_1 \end{pmatrix}.$$

ii) Répéter autant de fois les mêmes type d'opérations, on trouvera des matrices $P_2, \cdots P_r \in GL_m(\mathbb{K})$ et $Q_2, \cdots, Q_r \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $(P_r P_{r-1} \cdots P_1) A (Q_1 Q_2 \cdots Q_r) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$. Il suffit de poser

$$P = P_r P_{r-1} \cdots P_1 \in GL_m(\mathbb{K}) \text{ et } Q = Q_1 Q_2 \cdots Q_r \in GL_n(\mathbb{K}).$$

2$^{\text{ème}}$ étape Montrons que le nombre r est bien-défini, i.e., ne dṕend pas d'un choix des matrices P et Q.

Supposons qu'il existe $P_1, P_2 \in GL_m(\mathbb{K})$, $Q_1, Q_2 \in GL_n(\mathbb{K})$ et $r, s \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$P_1 A Q_1 = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{pmatrix} \text{ et } P_2 A Q_2 = \begin{pmatrix} I_s & 0_{s,n-s} \\ 0_{m-s,s} & 0_{m-s,n-s} \end{pmatrix}.$$

On pourra supposer que $r \leq s$. Alors,

$$\begin{pmatrix} I_s & 0_{s,n-s} \\ 0_{m-s,s} & 0_{m-s,n-s} \end{pmatrix} = P_2 A Q_2 = (P_2 P_1^{-1})(P_1 A Q_1)(Q_1^{-1} Q_2) = P \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{pmatrix} Q,$$

où $P = P_2 P_1^{-1} \in GL_m(\mathbb{K})$ et $Q = Q_1^{-1} Q_2 \in GL_n(\mathbb{K})$. Notons $P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{pmatrix}$ où

$P_{11} \in M_r(\mathbb{K})$, $P_{12} \in M_{r,m-r}(\mathbb{K})$, $P_{21} \in M_{m-r,r}(\mathbb{K})$ et $P_{22} \in M_{m-r}(\mathbb{K})$, et

$Q_{11} \in M_r(\mathbb{K})$, $Q_{12} \in M_{r,n-r}(\mathbb{K})$, $Q_{21} \in M_{n-r,r}(\mathbb{K})$ et $Q_{22} \in M_{n-r}(\mathbb{K})$.

Par l'hypothèse $r \leq s$ et

$$\begin{pmatrix} I_s & 0_{s,n-s} \\ 0_{m-s,s} & 0_{m-s,n-s} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} P_{11} Q_{11} & P_{11} Q_{12} \\ P_{21} Q_{11} & P_{21} Q_{12} \end{pmatrix},$$

on en déduit que

$$P_{11} Q_{11} = I_r, \quad P_{11} Q_{12} = 0_{r,n-r}, \quad P_{21} Q_{11} = 0_{m-r,r},$$

d'où P_{11}, Q_{11} sont inversibles. En particulier, ceci implique que $Q_{12} = 0_{r,n-r}$ et $P_{21} = 0_{m-r,r}$, donc $P_{21} Q_{12} = 0_{m-r,n-r}$. On en conclut que $r = s$.