

Fiche 5 : Applications linéaires II

Exercice 1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de \mathbb{R}^3 . On pose,

$$f_1 = e_1 + 2e_2 - 2e_3, \quad f_2 = 4e_1 + 7e_2 - 6e_3 \quad \text{et} \quad f_3 = -3e_1 - 5e_2 + 5e_3.$$

- a. Vérifier que $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ forme une base de \mathbb{R}^3 .
- b. Écrire la matrice de passage de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' .
- c. Soit v le vecteur de \mathbb{R}^3 de matrice $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{B}' . Calculer la matrice de v dans la base \mathcal{B} .
- d. Soit w le vecteur de \mathbb{R}^3 de matrice $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base \mathcal{B} . Calculer la matrice de w dans la base \mathcal{B}' .

Exercice 2. Soit f l'application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 définie par

$$f(x, y, z) = (x + z, 4x - 2y + z)$$

pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Notons la base canonique de \mathbb{R}^3 par $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et celle de \mathbb{R}^2 par $\mathcal{C} = (f_1, f_2)$.

- a. Donner la matrice de f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} .
- b. Posons $v_1 = e_1 + e_2 + e_3, v_2 = e_1 + 2e_2 + 4e_3$ et $v_3 = e_1 + 3e_2 + 9e_3$. Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ forme une base de \mathbb{R}^3 .
- c. Expliciter la matrice de passage Q de \mathcal{B} vers \mathcal{B}' . Ensuite, calculer Q^{-1} .
- d. Posons $w_1 = f_1 + f_2$ et $w_2 = f_2$. Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{C}' = (w_1, w_2)$ forme une base de \mathbb{R}^2 .
- e. Expliciter la matrice de passage P de \mathcal{C} vers \mathcal{C}' . Ensuite, calculer P^{-1} .
- f. En déduire la matrice de f dans les bases \mathcal{B}' et \mathcal{C}' .

Exercice 3. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par

$$f(e_1) = 13e_1 + 12e_2 + 6e_3, \quad f(e_2) = -8e_1 - 7e_2 - 4e_3, \quad f(e_3) = -12e_1 - 12e_2 - 5e_3,$$

où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de \mathbb{R}^3 .

- a. Donner la matrice de f dans la base canonique.
- b. Posons $v_1 = 2e_1 + 3e_2, v_2 = 3e_2 - 2e_3$ et $v_3 = 2e_1 + 2e_2 + e_3$. Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ forme une base de \mathbb{R}^3 .
- c. Exprimer l'image de \mathcal{B} par f dans la base \mathcal{B} . En déduire la matrice de f dans la base \mathcal{B} .

Exercice 4. Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique. On pose,

$$f_3 = (-1, 1, 1), f_2 = u(f_3) - f_3 \text{ et } f_1 = u(f_2) - f_2.$$

- a. Calculer les coordonnées de f_2 et f_1 dans la base canonique.
- b. Vérifier que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ forme une base de \mathbb{R}^3 .
- c. Donner la matrice N de u dans la base \mathcal{B} .
- d. Vérifier que pour tout entier $n \geq 0$,

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- e. En utilisant la matrice de passage P de la base canonique vers la base \mathcal{B} , calculer pour tout $n \geq 0$, la matrice A^n , puis $u^n(1, 1, 1)$.

Exercices à préparer pour le contrôle.

Exercice 1. Soit $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ une base de \mathbb{R}^4 et λ un réel. On considère l'endomorphisme u_λ défini par

$$u(f_1) = f_1 + \lambda f_4, \quad u(f_2) = f_2 - \lambda f_3, \quad u(f_3) = 2f_3 + \lambda f_4 \quad \text{et} \quad u(f_4) = -\lambda f_3 + (\lambda - 4)f_4.$$

- Donner la matrice A_λ de u_λ dans la base \mathcal{B} .
- Pour quelle valeur de λ , l'endomorphisme u_λ est-il bijectif?

Exercice 2. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x, y, z) = (-x + y + z, -6x + 4y + 2z, 3x - y + z).$$

- Écrire la matrice A de f dans la base canonique :
- Calculer A^2 et en déduire que $f \circ f = 2f$.
- En déduire que si $v \in \text{Im} f$ alors $f(v) = 2v$.
- Montrer à l'aide de la question précédente que $\text{Ker} f \cap \text{Im} f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
- En déduire que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker} f \oplus \text{Im} f$.
- Trouver une base (e_1, e_2, e_3) telle que f a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dans cette base.