Fiche 4 : Applications linéaires I

Exercice 1. Soit a un réel. Parmi les applications suivantes, déterminer celles qui sont linéaires :

a) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (y,x) \end{array}$ b) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,a) \end{array}$ c) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (ax,ay) \end{array}$

d) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+a,y+a) \end{array}$ e) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+z,y+z) \end{array}$

f) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x^2,y^2,z^2) \end{array}$ g) $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$

Exercice 2. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^5$ définie pour tous α, β reéls par

$$f[(\alpha,\beta)] = (\alpha+2\beta, \alpha, \alpha+\beta, 3\alpha+5\beta, -\alpha+2\beta)$$

a) Montrer que f est une application linéaire.
b) Déterminer Ker f et préciser sa dimension.
c) Déterminer Im f et préciser sa dimension.

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$u = (2,1,-1), \qquad v = (1,-1,3), \qquad w = (3,3,-5).$$

On note F le sous-espace vectoriel engendré par (u,v,w).

a) Déterminer une base de F.
b) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie pour des réels α, β, γ par

$$f[(\alpha,\beta,\gamma)] = (3\alpha+\gamma, \alpha-\beta+\gamma, -3\alpha-3\beta+\gamma).$$

Montrer que f est un endomorphisme [1] de $\mathbb{R}^3$.
c) Déterminer une base de Ker f et une base de Im f. Préciser le rang de f.
d) A-t-on $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}f \oplus \mathrm{Im}f$?
e) Les vecteurs u, v, w sont-ils des éléments de Imf ?
f) Déterminer une base et la dimension de $F \cap \mathrm{Im}f$

---

1. Un endomorphisme d'un espace vectoriel E est une application linéaire de E dans E.

Exercice 4. Soient $n \geq 1$ et $m \geq 1$ deux entiers. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. Soit $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que si $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ alors $(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_p))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im} f$.

b) Montrer que si $(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_p))$ est une famille libre alors $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ est une famille libre.

c) Montrer que si f est injective et si $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ est une famille libre alors $(f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_p))$ est une famille libre.

Exercice 5. Soit $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ une base de $\mathbb{R}^3$, et λ un nombre réel. Démontrer que la donnée de

$$\begin{cases} \phi(\vec{e_1}) & = & \vec{e_1} + \vec{e_2} \\ \phi(\vec{e_2}) & = & \vec{e_1} - \vec{e_2} \\ \phi(\vec{e_3}) & = & \vec{e_1} + \lambda\vec{e_3} \end{cases}$$

définit une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Écrire l'image du vecteur $\vec{v} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}$. Comment choisir λ pour que ϕ soit injective ? surjective ?

Exercice 6. Soit u l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, par

$$u(x, y, z, t) = (x + y + z + t, y - t, x - 2z + 3t)\,.$$

a) Montrer que u est une application linéaire.

b) Déterminer une base et la dimension du noyau de u. Est-elle injective ?

c) En déduire que u est surjective.

Exercice 7. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Pour $p \leq n$ on note e_p le polynôme X^P. Soit f l'application définie sur E par $f(P) = Q$ avec $Q(X) = P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X)$.

a. Montrer que f est une application linéaire de E dans E.

b. Pour $p \leq n$, calculer $f(e_p)$; quel est son degré ? En déduire $\ker f$, $\mathrm{Im}\ f$ et le rang de f.

c. Soit Q un polynôme de $\mathrm{Im}\ f$; montrer qu'il existe un polynôme unique P tel que : $f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$.

Exercice 8. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq n$, et $f : E \to E$ définie par :

$$f(P) = P + (1 - X)P'.$$

Montrer que f est une application linéaire et donner une base de $\mathrm{Im} f$ et de $\ker f$.

Exercices à préparer pour le contrôle.

Exercice 1. On considère $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(e_1) = e_1\,, \quad f(e_2) = -e_1\,, \quad f(e_3) = e_3\,.$$

a) Déterminer l'image par f d'un élément (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer le noyau et l'image de f et donner une base de chacun d'eux.

c) Montrer que $f \circ f = f$.

Exercice 2. Soit $n \geq 1$ un entier. Soient u et v deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ tels que $u \circ v = 0$. Montrer que

$$\operatorname{Im} v \subseteq \operatorname{Ker} u.$$

En déduire que

$$\operatorname{rang}(u) + \operatorname{rang}(v) \leqslant n\,.$$

Exercice 3. Donner des exemples d'applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

a) $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Im}(f)$.

b) $\operatorname{Ker}(f)$ inclus strictement dans $\operatorname{Im}(f)$.

c) $\operatorname{Im}(f)$ inclus strictement dans $\operatorname{Ker}(f)$.

Exercice 4. a) Soit f une application linéaire surjective de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$. Quelle est la dimension du noyau de f ?

b) Soit g une application injective de $\mathbb{R}^{26}$ dans $\mathbb{R}^{100}$. Quelle est la dimension de l'image de g ?

c) Existe-t-il une application linéaire bijective entre $\mathbb{R}^{50}$ et $\mathbb{R}^{72}$?

Exercice 5. Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Quand la réponse est oui, sont-elles surjectives, injectives ? Déterminer leur image et leur noyau.

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+i) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X] \\ P & \longmapsto & P(X^2) \end{array} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$