SECOND CONTRÔLE.
Durée 1h. Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.
Le sujet est constitué de deux exercices indépendants.

EXERCICE 1

Soit $f_1 = xy - y + z$, $f_2 = yz - z^2$ et $f = xy^2 + xz^3 - y^2 + z^2$, trois polynômes de $\mathbb{Q}[x, y, z]$. A-t-on $f \in \langle f_1, f_2 \rangle$?

EXERCICE 2

Un ordre monomial étant fixé, rappelons qu'une base de Gröbner G d'un idéal I de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ est dite *réduite* si tout polynôme $g \in G$ est unitaire et est sous forme normale par rapport à $G \setminus \{g\}$.

Les deux parties qui suivent sont indépendantes.

Partie 1. Pour cette partie, on considère l'ordre lexicographique gradué $\preccurlyeq_{\text{grlex}}$ associé à l'ordre alphabétique $x > y > z$. On note I l'idéal

$$\langle x^4y^2z - x^2y,\ x^4 - y^2z^2 - x^2 + yz,\ y^2z - y \rangle$$

de $\mathbb{Q}[x, y, z]$.

i) Vérifier que $G = \{x^4y^2z - x^2y,\ x^4 - y^2z^2 - x^2 + yz,\ y^2z - y\}$ est une base de Gröbner de I.

ii) G est-elle réduite ? Sinon, calculer une base de Gröbner réduite de I.

Partie 2. Le but de cette partie est de montrer l'unicité des bases de Gröbner réduites.

On fixe un ordre monomial sur $\mathcal{M}(x_1, \ldots, x_n)$ et on considère $G_1 = \{f_1, \ldots, f_m\}$ et $G_2 = \{g_1, \ldots, g_l\}$ deux bases de Gröbner réduites d'un idéal I de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, différent de l'idéal trivial $\{0\}$.

i) Montrer que $\text{multideg}(f_i) \neq \text{multideg}(f_j)$ pour $i \neq j$.

On supposera pour la suite que pour $0 < i < m$, $\text{multideg}(f_i) < \text{multideg}(f_{i+1})$ et que pour $0 < j < l$, $\text{multideg}(g_j) < \text{multideg}(g_{j+1})$.

Comme G_1 et G_2 sont des bases de Gröbner du même idéal I, on sait qu'il existe j_0 tel que que $\text{lt}(g_{j_0})$ divise $\text{lt}(f_1)$ et qu'il existe i_0 tel que $\text{lt}(f_{i_0})$ divise $\text{lt}(g_{j_0})$.

ii) Montrer que $i_0 = 1$, c'est-à-dire que $f_{i_0} = f_1$.

iii) Montrer que $j_0 = 1$ et en déduire que $\text{lt}(g_1) = \text{lt}(f_1)$.

iv) Montrer que $g_1 = f_1$.

Supposons maintenant que pour un entier $k < \min\{m, l\}$, on a $f_i = g_i$ pour tout $i \leqslant k$.

v) Montrer que $f_{k+1} = g_{k+1}$.

vi) Conclure.