PREMIER CONTRÔLE
Durée 1h.
Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.
Une grande importance sera accordée à la précision de la rédaction.

EXERCICE 1

1. Soit l'ensemble $V = \{(a,a) \colon a \in \mathbb{R}\} \cup \{(a,-a) \colon a \in \mathbb{R}\}$. Vérifier que V est un ensemble algébrique affine.

2. Soit deux ensembles algébriques affines V_1 et V_2 de $\mathbb{K}^n$. Montrer que

$$I(V_1 \cup V_2) = I(V_1) \cap I(V_2).$$

EXERCICE 2

On se place dans l'anneau $\mathbb{Q}[x]$ et l'on considère les polynômes suivants :
- $f_1 = x^5 - 4x^3 + x^2 + 4x - 2$;
- $f_2 = x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 1$;
- $f = x^2 + 200x + 100$;
- $g = x^5 + x^2 - 4x + 2$.

Déterminer pour chacun des polynômes f et g s'il appartient à l'idéal $\langle f_1, f_2 \rangle$. Si oui, exprimer ce polynôme en fonction de f_1 et f_2.

EXERCICE 3

On considère l'ordre lexicographique $\preccurlyeq_{\text{lex}}$ et l'ordre lexicographique gradué $\preccurlyeq_{\text{grlex}}$, induits par $x > y > z$ sur l'ensemble des monômes en x, y, z.

1. Classer dans l'ordre croissant pour $\preccurlyeq_{\text{lex}}$, puis pour $\preccurlyeq_{\text{grlex}}$, les monômes suivants

$$x^2y^2z^2, \quad x^3z^2, \quad x^3z^3, \quad x^2y^3z, \quad x^5y, \quad yz^6.$$

2. Combien y-a-t-il de monômes strictement plus petits que xyz pour l'ordre lexicographique $\preccurlyeq_{\text{lex}}$?

3. Combien y-a-t-il de monômes strictement plus petits que xyz pour l'ordre lexicographique gradué $\preccurlyeq_{\text{grlex}}$?

Correction

Exercice 1 : 1. On remarque que $V = V(y^2 - x^2)$, c'est donc bien un ensemble algébrique affine.

2. Soit deux ensembles algébriques affines V_1 et V_2 de $\mathbb{K}^n$. Soit $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Alors

$$\begin{array}{lll} f \in I(V_1 \cup V_2) & \text{ssi} & \forall (x_1, \ldots, x_n) \in V_1 \cup V_2,\ f(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ & \text{ssi} & \forall (x_1, \ldots, x_n) \in V_1,\ f(x_1, \ldots, x_n) = 0 \text{ et} \\ & & \forall (x_1, \ldots, x_n) \in V_2,\ f(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ & \text{ssi} & f \in I(V_1) \text{ et } f \in I(V_2) \\ & \text{ssi} & f \in I(V_1) \cap I(V_2). \end{array}$$

Exercice 2 : On calcule le PGCD de f_1 et f_2 en utilisant l'algorithme d'Euclide. On obtient :

$$f_1 = f_2(x-1) - x^3 + 2x - 1$$

puis,

$$f_2 = (x^3 - 2x + 1)(x + 1).$$

Le PGCD de f_1 et f_2 vaut donc $x^3 - 2x + 1$ et l'idéal

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \langle x^3 - 2x + 1 \rangle$$

Le polynôme f étant de degré 2, il n'est pas divisible par $x^3 - 2x + 1$ et donc n'appartient pas à $\langle f_1, f_2 \rangle$.

En effectuant la division euclidienne de g par $x^3 - 2x + 1$, on obtient $g = (x^3 - 2x + 1)(x^2 + 2)$ et ainsi $g \in \langle f_1, f_2 \rangle$. On a $x^3 - 2x + 1 = f_2(x-1) - f_1$ d'où

$$g = f_2(x-1)(x^2+2) - f_1(x^2+2) = f_2(x^3 - x^2 + 2x - 2) - f_1(x^2+2).$$

Exercice 3 : 1.

$$yz^6 \preccurlyeq_{\text{lex}} x^2y^2z^2 \preccurlyeq_{\text{lex}} x^2y^3z \preccurlyeq_{\text{lex}} x^3z^2 \preccurlyeq_{\text{lex}} x^3z^3 \preccurlyeq_{\text{lex}} x^5y$$

$$x^3z^2 \preccurlyeq_{\text{grlex}} x^2y^2z^2 \preccurlyeq_{\text{grlex}} x^2y^3z \preccurlyeq_{\text{grlex}} x^3z^3 \preccurlyeq_{\text{grlex}} x^5y \preccurlyeq_{\text{grlex}} yz^6.$$

2. Il y a une infinité de monômes strictement plus petits que xyz pour l'ordre lexicographique $\preccurlyeq_{\text{lex}}$; en effet tous les monômes de la forme y^kz^l sont strictement plus petits (mais aussi ceux de la forme xz^m ; et un dernier, lequel ?).

3. Un monôme strictement plus petit que xyz pour l'ordre lexicographique gradué $\preccurlyeq_{\text{grlex}}$ est de degré total au plus 3. Il y en a donc un nombre fini. Tous les monômes de degré total au plus 2 sont strictement plus petits ; ils sont en nombre de 10 :

$$1, x, y, z, xy, yz, xz, x^2, y^2, z^2.$$

Il y a de plus 5 monômes strictement plus petits que xyz de degré total 3 ; ceux qui sont plus petits pour l'ordre lexicographique :

$$xz^2, y^3, y^2z, yz^2, z^3.$$

Au total, il y a donc 15 monômes strictement plus petits.