

CHAPITRE IX

Programmation linéaire en nombres entiers

Sommaire

1. Exemples de problèmes de programmation linéaire 119
2. Traduction sous forme d'une équation polynomiale d'un problème de programmation linéaire en nombres entiers 121

§ 1 Exemples de problèmes de programmation linéaire

IX.1.1. Exemple : Production de peinture.— Une société produit de la peinture d'extérieur et d'intérieur à partir de deux produits de bases B1 et B2. Les gains par tonne de production des peintures d'extérieur et d'intérieur sont comparativement de facteurs 5 et 4. Les quantités utilisées et disponibles des produits de bases sont explicitées dans le tableau ci-dessous :

	Quantité utilisée par tonne produite		Quantité disponible par jour
	Peinture d'extérieur	Peinture d'intérieur	
B1	6	4	24
B2	1	2	6
Profit par tonne	5	4	

La chaîne de production ne peut produire qu'au plus deux tonnes de peinture d'intérieur par jour. Le problème est de déterminer les quantités de peinture d'extérieur et d'intérieur que l'on peut produire par jour afin d'avoir un gain optimal.

IX.1.2. Modélisation : Production de peinture.—

2 inconnues du problème

- σ_1 = tonnes de peinture d'extérieur produites par jour ;
- σ_2 = tonnes de peinture d'intérieur produites par jour.

Contraintes

$$\begin{aligned} 6\sigma_1 + 4\sigma_2 &\leq 24, \\ \sigma_1 + 2\sigma_2 &\leq 6, \\ \sigma_2 &\leq 2. \end{aligned}$$

Gain à optimiser

$$g(\sigma_1, \sigma_2) = 5\sigma_1 + 4\sigma_2.$$

On appelle *solution admissible* toutes valeurs satisfaisant les contraintes du problème. (Ce ne sont pas nécessairement des valeurs optimales.)

On peut utiliser ici une méthode graphique pour obtenir l'ensemble des solutions admissibles.

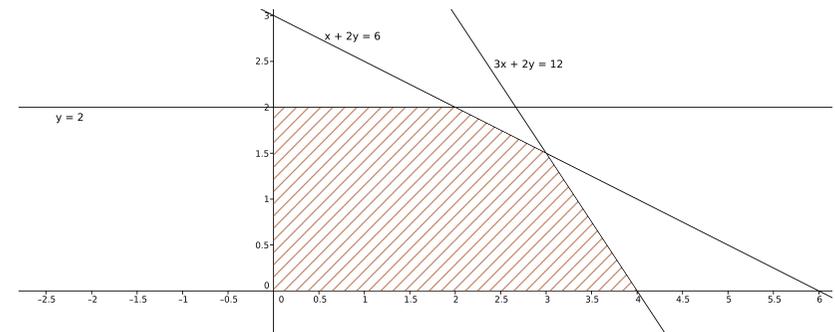


FIGURE IX.1.: Solutions admissibles

Exercice 119.— À l'aide de la représentation graphique ci-dessus, déterminer une solution permettant un gain maximal.

IX.1.3. Exemple : Coût de livraison.— Une firme automobile américaine a trois usines de production d'un modèle de véhicule : Los Angeles, Détroit et la Nouvelle-Orléans. Elle a deux centres de distribution : Denver et Miami. Le problème est ici de minimiser le coût des transports entre les usines et les centres de distribution avec les contraintes de production et des demandes.

	Capacité de production	Coûts de transports	
		Denver	Miami
Los Angeles	1000	80	215
Détroit	1500	100	108
La Nouvelle-Orléans	1200	102	68
Demandes des centres de distribution	3700	2300	1400

IX.1.4. Modélisation : Coût de livraison.—

6 inconnues du problème

- $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ nombres de voitures produites respectivement à Los Angeles, Détroit et la Nouvelle-Orléans et distribuées à Denver ;
- $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ nombres de voitures produites respectivement à Los Angeles, Détroit et la Nouvelle-Orléans et distribuées à Miami.

Contraintes

$$\begin{aligned} \sigma_1 + \sigma'_1 &= 1000, \\ \sigma_2 + \sigma'_2 &= 1500, \\ \sigma_3 + \sigma'_3 &= 1200, \\ \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 &= 2300, \\ \sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 &= 1400. \end{aligned}$$

Coût à optimiser

$$c(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3) = 80\sigma_1 + 100\sigma_2 + 102\sigma_3 + 215\sigma'_1 + 108\sigma'_2 + 68\sigma'_3.$$

IX.1.5. Exemple : Problème du voyageur de commerce.— Un représentant doit visiter n villes une et une seule fois et revenir à sa ville de départ. Le coût de déplacement de la ville i à la ville j est $c_{i,j}$. Le problème consiste à trouver un parcours de coût minimal.

IX.1.6. Modélisation : Problème du voyageur de commerce.—

$n(n-1)$ inconnues

Pour $i \neq j$, on considère l'inconnue $\sigma_{i,j}$ valant 0 ou 1, suivant si l'on passe de ou non de la ville i à la ville j .

Contraintes

- $\sum_{j=1}^n \sigma_{i,j} = 1, i = 1, \dots, n$ (On ne part qu'une seule fois de la ville i .)
- $\sum_{i=1}^n \sigma_{i,j} = 1, j = 1, \dots, n$ (On n'arrive qu'une seule fois à la ville j .)
- $\sum_{i,j \in S} \sigma_{i,j} \leq |S| - 1$ pour toute partie propre S de $\{1, \dots, n\}$ (On interdit les sous-parcours.)

Coût à optimiser

$$\sum_{i \neq j} c_{i,j} \sigma_{i,j}.$$

§ 2 Traduction sous forme d'une équation polynomiale d'un problème de programmation linéaire en nombres entiers

Un *programme linéaire en nombres entiers* correspond à un système d'équations et inéquations linéaires (contraintes) dont les inconnues sont à valeurs entières positives ou nulles et les coefficients sont entiers, avec une fonction à optimiser (minimiser), qui est linéaire à coefficients réels (voir exemples IX.1.4, IX.1.5).

Un programme linéaire est dit sous forme normale, si les contraintes ne sont que des équations (exemple IX.1.4). Notons que l'on peut toujours se ramener à une forme normale en ajoutant une inconnue supplémentaire par inéquation, afin de la représenter par une équation.

Voici une description formelle d'un tel problème :

Données

Une matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in M_{n,m}(\mathbb{Z})$, un vecteur colonne $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{Z})$

et un uple $(c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^m$.

Problème Trouver une solution $(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \in \mathbb{N}^m$ du système linéaire

$$\begin{cases} a_{11}\sigma_1 + a_{12}\sigma_2 + \cdots + a_{1m}\sigma_m = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}\sigma_1 + a_{n2}\sigma_2 + \cdots + a_{nm}\sigma_m = b_n \end{cases} \text{ c.à.d. } A \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

qui minimise la fonction coût $c(\sigma_1, \dots, \sigma_m) = \sum_{j=1}^m c_j \sigma_j$.

IX.2.1. Exemple.— Trouver $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) \in \mathbb{N}^4$ tel que

$$\begin{cases} 3\sigma_1 + 2\sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 = 10 \\ 4\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 5 \end{cases}$$

qui minimise la fonction coût $c(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) = \sigma_1 + 2\sigma_2 + 3\sigma_3 + 12\sigma_4$.

IX.2.2. Contraintes avec coefficients positifs ou nuls.— Pour commencer, nous supposons que les coefficients dans les contraintes sont positifs ou nuls, c'est-à-dire $a_{ij} \geq 0$ et $b_i \geq 0$ pour tout i, j . On peut alors traduire le système linéaire

$$A \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

en une équation algébrique dans $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$,

$$x_1^{a_{11}} \sigma_1 + a_{12} \sigma_2 + \cdots + a_{1m} \sigma_m x_2^{a_{21}} \sigma_1 + a_{22} \sigma_2 + \cdots + a_{2m} \sigma_m \dots x_n^{a_{n1}} \sigma_1 + a_{n2} \sigma_2 + \cdots + a_{nm} \sigma_m = x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n}. \quad (\star)$$

Pour l'exemple IX.2.1, on obtient l'équation

$$x_1^{3\sigma_1 + 2\sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4} x_2^{4\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3} = x_1^{10} x_2^5.$$

Exercice 120.— Écrire l'équation polynomiale correspondant à l'exemple IX.1.4.

L'équation \star est équivalente à

$$(x_1^{a_{11}} x_2^{a_{21}} \dots x_n^{a_{n1}})_1^\sigma \dots (x_1^{a_{1m}} x_2^{a_{2m}} \dots x_n^{a_{nm}})_m^\sigma = x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n}.$$

Pour $j \in \{1, \dots, m\}$, on pose $f_j(x_1, \dots, x_n) = x_1^{a_{1j}} x_2^{a_{2j}} \dots x_n^{a_{nj}} \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ et on considère pour résoudre le problème, le morphisme

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Q}[y_1, \dots, y_m] &\longrightarrow \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n] \\ f(y_1, y_2, \dots, y_m) &\longmapsto f(f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) \end{aligned}$$

Pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$, l'image de y_j par ce morphisme est $f_j(x_1, \dots, x_n)$. En fait, c'est l'unique morphisme de $\mathbb{Q}[y_1, \dots, y_m]$ vers $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ vérifiant cette propriété.

Notons que si $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ est une solution admissible du problème alors

$$\varphi(y_1^{\sigma_1} y_2^{\sigma_2} \dots y_m^{\sigma_m}) = f_1^{\sigma_1} \dots f_m^{\sigma_m} = x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n}$$

et en particulier $x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \in \text{Im}(\varphi)$. Nous allons voir réciproquement que si $x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \in \text{Im}(\varphi)$ alors il existe une solution admissible, que l'on pourra calculer à l'aide d'une base de Gröbner.

Pour la suite, nous fixons un ordre monomial sur $\mathcal{M}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$ de telle façon que les polynômes de $\mathbb{Q}[y_1, \dots, y_m]$ soient plus petits que tous les polynômes ayant des variables en x_1, \dots, x_n . On peut par exemple prendre l'ordre lexicographique associé à $x_1 > x_2 > \dots > x_n > y_1 > \dots > y_m$.

On considère ensuite l'idéal

$$I = \langle f_j - y_j : j \in \{1, \dots, m\} \rangle$$

et G la base de Gröbner réduite de I pour l'ordre monomial fixé.

IX.2.3. Remarque.—

1. pour tout j , il existe r_j sous forme normale modulo G tel que $y_j \xrightarrow{G} r_j \in \mathbb{Q}[y_1, \dots, y_m]$ car le monôme y_j est plus petit que tout polynôme ayant des variables en x_1, \dots, x_n ;
2. pour tout j , on a $f_j \xrightarrow{G} r_j$ car $f_j - y_j \in I$;
3. si $(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \in \mathbb{N}^m$ est une solution admissible du problème, c'est-à-dire, si $x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} = f_1^{\sigma_1} \dots f_m^{\sigma_m}$ alors

$$x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \xrightarrow{G} r_1^{\sigma_1} \dots r_m^{\sigma_m} \in \mathbb{Q}[y_1, \dots, y_m]$$

Nous allons maintenant vérifier la réciproque et plus précisément le résultat suivant :

IX.1 Théorème.— Le problème a au moins une solution admissible si et seulement si $x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \xrightarrow{G} r \in \mathbb{Q}[y_1, \dots, y_m]$ si et seulement si $x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \xrightarrow{G} y_1^{\sigma_1} \dots y_m^{\sigma_m}$ pour un uple $(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \in \mathbb{N}^m$, et dans ce cas $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ est une des solutions admissibles. On peut de plus supposer que $y_1^{\sigma_1} \dots y_m^{\sigma_m}$ est sous forme normale modulo G .

Preuve. Par la remarque qui précède, si le problème a une solution admissible, il existe $r \in \mathbb{Q}[y_1, \dots, y_m]$ tel que $x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \xrightarrow{G} r$.

Vérifions maintenant que si $x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \xrightarrow{G} r$ alors r est un monôme et donc, si $r \in \mathbb{Q}[y_1, \dots, y_m]$, il est de la forme $y_1^{\sigma_1} \dots y_m^{\sigma_m}$ pour un uple $(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \in \mathbb{N}^m$. Notons que les f_j sont des monômes et donc que l'idéal I est engendré par des différences de monômes. En reprenant, l'algorithme de Buchberger, on peut facilement vérifier que l'on obtient ainsi une base de Gröbner formée de différences de monômes et l'algorithme de réduction d'une base de Gröbner donne alors également une base G formée uniquement de différences de monômes (vérification laissée en exercice). Ainsi, toute réduction d'un monôme par G donne un monôme et en particulier r est un monôme. Si r n'était pas sous forme normale, on peut le réduire en un monôme plus petit qui sera toujours dans $\mathbb{Q}[y_1, \dots, y_m]$.

Enfin, si $x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \xrightarrow{G} y_1^{\sigma_1} \dots y_m^{\sigma_m}$, alors il existe des polynômes $g_j \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$ tels que

$$x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} - y_1^{\sigma_1} \dots y_m^{\sigma_m} = \sum_{j=1}^m g_j(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)(f_j(x_1, \dots, x_n) - y_j).$$

Si on substitue f_j à y_j dans l'équation ci-dessus, on obtient

$$x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} - f_1^{\sigma_1} \dots f_m^{\sigma_m} = 0$$

et ainsi $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ est une solution admissible. \square

IX.2 Exemple.— Reprenons l'exemple IX.2.1 et utilisons le théorème précédent pour trouver une solution $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) \in \mathbb{N}^4$ de

$$\begin{cases} 3\sigma_1 + 2\sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 = 10 \\ 4\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 5 \end{cases}$$

Rappelons que ce système correspond à l'équation algébrique

$$x_1^{3\sigma_1 + 2\sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4} x_2^{4\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3} = (x_1^3 x_2^4)^{\sigma_1} (x_1^2 x_2)^{\sigma_2} (x_1 x_2)^{\sigma_3} x_1^{\sigma_4} = x_1^{10} x_2^5.$$

On pose $f_1 = x_1^3 x_2^4$, $f_2 = x_1^2 x_2$, $f_3 = x_1 x_2$ et $f_4 = x_1$. On introduit quatre nouvelles variables y_1, y_2, y_3, y_4 et on considère l'idéal

$$I = \langle x_1^3 x_2^4 - y_1, x_1^2 x_2 - y_2, x_1 x_2 - y_3, x_1 - y_4 \rangle.$$

On calcule alors la base de Gröbner réduite G associée à l'ordre lexicographique (à faire en exercice ou à l'aide de Sage) :

$$G = \{x_1 - y_4, x_2 y_3^3 - y_1, x_2 y_4 - y_3, y_1 y_4 - y_3^4, y_2 - y_3 y_4\}$$

Alors

$$x_1^{10} x_2^5 \xrightarrow{G} x_2^5 y_4^{10} \xrightarrow{G} y_3^5 y_4^5$$

et donc $(0, 0, 5, 5)$ est une solution admissible.

Il s'agit maintenant de trouver une solution admissible qui minimise le coût. Pour cela, il faudra choisir un ordre monomial adéquat.

IX.2.4. Optimisation du coût et ordre monomial.—

Un ordre monomial \preceq sur $\mathcal{M}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ est dit *compatible* avec une fonction coût $c(\sigma_1, \dots, \sigma_m) = \sum_{j=1}^m c_j \sigma_j$, si $c(\sigma_1, \dots, \sigma_m) < c(\sigma'_1, \dots, \sigma'_m)$ implique que $y_1^{\sigma_1} \dots y_m^{\sigma_m} \preceq y_1^{\sigma'_1} \dots y_m^{\sigma'_m}$.

IX.3 Proposition.— Si l'ordre monomial est de plus compatible avec la fonction coût, alors le théorème précédent donne une solution admissible qui minimise le coût, s'il existe au moins une solution.

Preuve. Par le théorème précédent, s'il existe une solution alors $x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \xrightarrow{G} y_1^{\sigma_1} \dots y_m^{\sigma_m}$ pour un uple $(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \in \mathbb{N}^m$ qui est une solution admissible et tel que $y_1^{\sigma_1} \dots y_m^{\sigma_m}$ est sous forme normale. Montrons que celle-ci minimise le coût. Soit $(\sigma'_1, \dots, \sigma'_m)$, une autre solution

admissible, qui vérifie donc $x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} = f_1^{\sigma'_1} \dots f_m^{\sigma'_m}$. En considérant la base de Gröbner $G' = G \cup \{f_j - y_j : j \in \{1, \dots, m\}\}$, on a les réductions suivantes

$$x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n} \xrightarrow{G'} y_1^{\sigma'_1} \dots y_m^{\sigma'_m} \xrightarrow{G} y_1^{\sigma_1} \dots y_m^{\sigma_m}.$$

Ainsi, $y_1^{\sigma_1} \dots y_m^{\sigma_m} \preceq y_1^{\sigma'_1} \dots y_m^{\sigma'_m}$ et donc $c(\sigma_1, \dots, \sigma_m) \leq c(\sigma'_1, \dots, \sigma'_m)$ \square

IX.2.5. Remarque.— Dans le cas où les coefficients c_j sont tous positifs, on obtient facilement un ordre monomial compatible avec la fonction coût. Il suffit pour cela de considérer l'ordre lexicographique gradué sur $\mathcal{M}(y_1, \dots, y_m)$ avec poids (c_1, \dots, c_m) , c'est à dire tel que

$$y_1^{\sigma_1} \dots y_m^{\sigma_m} \preceq y_1^{\sigma'_1} \dots y_m^{\sigma'_m}.$$

si, et seulement si,

$$c(\sigma_1, \dots, \sigma_m) < c(\sigma'_1, \dots, \sigma'_m) \quad \text{ou} \quad \left(c(\sigma_1, \dots, \sigma_m) = c(\sigma'_1, \dots, \sigma'_m) \quad \text{et} \quad y^\sigma \preceq_{\text{lex}} y^{\sigma'} \right).$$

- Exercice 121.**— 1. Vérifier que la relation ci-dessus définit un ordre monomial sur $\mathcal{M}(y_1, \dots, y_m)$.
 2. Expliquer comment à partir de cet ordre, on peut obtenir un ordre monomial sur $\mathcal{M}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ tel que les polynômes de $\mathbb{Q}[y_1, \dots, y_m]$ soient plus petits que tous les polynômes ayant des variables en x_1, \dots, x_n et tel que cet ordre soit compatible avec la fonction coût.

Voici le code Sage pour l'exemple IX.2.1 avec la fonction coût $c(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) = \sigma_1 + 2\sigma_2 + 3\sigma_3 + 12\sigma_4$:

```
sage: reset()
sage: TX = TermOrder('lex', 2)
sage: TY = TermOrder('wdeglex', (1, 2, 3, 12))
sage: Tc = TX + TY
sage: R.<x1, x2, y1, y2, y3, y4>= PolynomialRing(QQ, 6, order = Tc)
sage: f1 = x1^3*x2^4; f2 = x1^2*x2; f3 = x1*x2; f4=x1
sage: I = (f1-y1, f2-y2, f3-y3, f4-y4)*R
sage: G = I.groebner_basis()
sage: f=x1^10*x2^5
sage: f.reduce(G)
      y2^5
```

La solution admissible $(0, 5, 0, 0)$ est optimale pour cette fonction coût, ce qui n'était pas le cas de la solution admissible $(0, 0, 5, 5)$.

Exercice 122.— Modifier la fonction coût pour obtenir des solutions optimales différentes.

Exercice 123.— Trouver une solution entière au problème correspondant au système

$$\begin{cases} 4\sigma_1 + \sigma_2 + 3\sigma_3 & = 12 \\ 3\sigma_1 + \sigma_2 + 2\sigma_3 + 2\sigma_4 & = 10 \\ 2\sigma_1 + 2\sigma_3 + 4\sigma_3 + \sigma_4 & = 25 \end{cases}$$

minimisant le coût $c(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) = 2\sigma_1 + \sigma_2 + 3\sigma_3 + 4\sigma_4$.

IX.2.6. Contraintes avec coefficients entiers quelconques.— Dans le cas où les coefficients dans les contraintes ne sont pas nécessairement positifs ou nuls, c'est-à-dire dans le cas où certains $a_{ij} \geq 0$ et $b_i \geq 0$ sont négatifs, l'équation (*)

$$x_1^{a_{11}\sigma_1 + a_{12}\sigma_2 + \dots + a_{1m}\sigma_m} x_2^{a_{21}\sigma_1 + a_{22}\sigma_2 + \dots + a_{2m}\sigma_m} \dots x_n^{a_{n1}\sigma_1 + a_{n2}\sigma_2 + \dots + a_{nm}\sigma_m} = x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n}$$

associée au système $A \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ n'est plus une équation algébrique mais une équation rationnelle.

IX.2.7. Exemple.— Considérons un problème correspondant au système suivant :

$$\begin{cases} 3\sigma_1 - 2\sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4 & = -1 \\ 4\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 & = 5 \end{cases}$$

L'équation associée à ce système est alors égale à

$$(x_1^3 x_2^4)^{\sigma_1} (x_1^{-2} x_2)^{\sigma_2} (x_1 x_2^{-1})^{\sigma_3} (x_1^{-1})^{\sigma_4} = x_1^{-1} x_2^5.$$

Cette équation n'est pas une équation algébrique.

Afin de résoudre ce type de problème, on introduit une indéterminée supplémentaire w qui va nous permettre d'inverser les indéterminées x_1, \dots, x_n , en imposant de plus l'équation

$$x_1 \dots x_n w = 1.$$

Avec cette équation et en utilisant des puissances suffisantes de w , on obtient une équation algébrique en x_1, \dots, x_n, w équivalente à l'équation rationnelle (*).

Reprenons l'exemple ci-dessus. On considère w et l'équation $x_1 x_2 w = 1$. Alors l'équation rationnelle

$$(x_1^3 x_2^4)^{\sigma_1} (x_1^{-2} x_2)^{\sigma_2} (x_1 x_2^{-1})^{\sigma_3} (x_1^{-1})^{\sigma_4} = x_1^{-1} x_2^5$$

est équivalente à

$$(x_1^3 x_2^4)^{\sigma_1} (x_2^3 w^2)^{\sigma_2} (x_1^2 w)^{\sigma_3} (x_2 w)^{\sigma_4} = x_2^6 w.$$

Voici un code Sage pour trouver une solution à ce problème qui minimise le coût

$$c(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) = 1000\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + 100\sigma_4.$$

```
sage: reset()
sage: TXW = TermOrder('lex', 3)
sage: TY = TermOrder('wdeglex', (1000, 1, 1, 100))
sage: Tc = TXW + TY
sage: R.<x1, x2, w, y1, y2, y3, y4>= PolynomialRing(QQ, 7, order = Tc)
sage: f1 = x1^3*x2^4; f2 = x2^3*w^2; f3 = x1^2*w; f4 = x2*w
sage: I = (x1*x2*w-1, f1-y1, f2-y2, f3-y3, f4-y4)*R
sage: G = I.groebner_basis()
sage: f = x2^6*w
sage: f.reduce(G)
      y1*y2^3*y3^2
```

Ainsi $(1, 3, 2, 0)$ est une solution entière du problème minimisant son coût.

Exercice 124.— Trouver une solution entière au problème correspondant au système

$$\begin{cases} 2\sigma_1 + \sigma_2 - 3\sigma_3 + \sigma_4 & = 4 \\ -3\sigma_1 + 2\sigma_2 - 2\sigma_3 - \sigma_4 & = -3 \end{cases}$$

minimisant le coût $c(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) = 2\sigma_1 + \sigma_2 + 3\sigma_3 + 4\sigma_4$.

CHAPITRE
X

D'autres applications des bases de Gröbner

Sommaire

1.	Applications de l'élimination	127
2.	Recherche de points singuliers	128
3.	Calcul de l'enveloppe d'une famille de courbes	130
4.	Une application en robotique	133

Cette partie porte sur l'étude d'applications de la méthode l'élimination. On s'intéressera notamment à deux applications géométriques : la recherche de points singuliers d'une courbe, le calcul de l'enveloppe d'une famille de courbes. Ces deux problèmes fournissent des systèmes d'équations polynomiales que l'on peut résoudre par élimination en utilisant les bases de Gröbner. Enfin, on présente une application originale en robotique.

§ 1 Applications de l'élimination

X.1.1. Résolution de systèmes d'équations polynomiales.—

Exercice 125. — En utilisant le théorème d'élimination, déterminer les solutions réelles et complexes des systèmes d'équations polynomiales suivants :

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - y - 2z = 0 \\ x^2 - 8y^2 + 10z = 1 \\ x^2 - 7yz = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0 \\ x^3 - yz - x = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

Exercice 126. — Résoudre en fonction de a le système d'équations polynomiales suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y + z = a \\ x + y^2 + z = a \\ x + y + z^2 = a \end{cases}$$

X.1.2. La surface d'Enneper.— La surface d'Enneper est une surface de \mathbb{R}^3 définie par le paramétrage suivant :

$$\begin{cases} x = 3u + 3uv^2 - u^3 \\ y = 3v + 3u^2v - v^3 \\ z = 3u^2 - 3v^2 \end{cases}$$

Donner une formulation implicite de de cette surface.

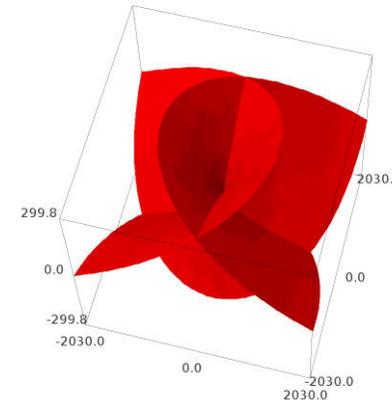


FIGURE X.1.: Surface d'Enneper.

§ 2 Recherche de points singuliers

X.2.1. Points singuliers.— Soit f un polynôme de $\mathbb{K}[x, y]$ et soit $\mathcal{C} = \mathbf{V}(f)$ la courbe de \mathbb{K}^2 définie par f , i.e., \mathcal{C} est formée de l'ensemble des points (x, y) de \mathbb{K}^2 vérifiant

$$f(x, y) = 0.$$

Rappelons que le gradient de la fonction f est le vecteur défini par

$$\text{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Un point (a, b) de \mathcal{C} est dit *singulier* si $\text{grad}(f)(a, b) = 0$. Sinon, lorsque $\text{grad}(f)(a, b)$ est non nul, on dit que le point (a, b) est *régulier*.

X.2.2. Tangente à une courbe.— Étant donné un point (a, b) de la courbe \mathcal{C} , une droite D passant par (a, b) est définie paramétriquement par

$$\begin{cases} x = a + ct \\ y = b + dt \end{cases}$$

La droite passe par le point (a, b) pour $t = 0$ et le vecteur (c, d) est parallèle à la droite D . L'ensemble des droites passant par (a, b) est obtenu en faisant varier le vecteur (c, d) . Posons

$$g(t) = f(a + ct, b + dt).$$

Comme $(a, b) \in \mathcal{C}$, 0 est une racine du polynôme g . On a

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(a + ct, b + dt).c + \frac{\partial f}{\partial y}(a + ct, b + dt).d.$$

d'où

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b).c + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).d.$$

Si $\text{grad}(f)(a, b) = 0$, alors $g'(0) = 0$. Si $\text{grad}(f)(a, b)$ est non nul, on a alors $g'(0) = 0$ si, et seulement si,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b).c + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).d = 0.$$

Lorsque (a, b) est un point régulier de \mathcal{C} , la courbe \mathcal{C} admet une tangente en (a, b) ; c' est la droite affine passant par (a, b) et dirigée par le vecteur (c, d) , orthogonal au vecteur $\text{grad}(f)(a, b)$.

X.2.3. Calcul des points singuliers.— Un point singulier (a, b) de \mathcal{C} vérifie

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0,$$

de plus, comme c' est une point de la courbe, on a

$$f(a, b) = 0.$$

Les points singuliers de \mathcal{C} sont ainsi les solutions du système d'équations polynomiales

$$\begin{cases} f = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

X.2.4. Exemple.— Considérons la cubique cuspidale $\mathcal{C} = \mathbf{V}(y^2 - x^3)$

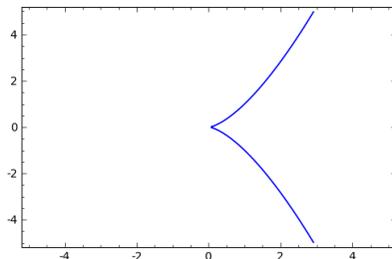


FIGURE X.2.: Cubique cuspidale $y^2 = x^3$.

Les points singuliers de \mathcal{C} sont les solutions du système :

$$\begin{cases} y^2 - x^3 = 0 \\ -3x^2 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

Il est immédiat que la courbe \mathcal{C} n'admet qu'un seul point singulier, le point $(0, 0)$.

Exercice 127.—

1. Tracer la courbe de \mathbb{R}^2 définie par l'équation

$$y^2 = x^2(1 + x).$$

2. Déterminer l'ensemble de ses points singuliers.

Exercice 128.—

1. On considère la courbe de \mathbb{R}^2 définie par

$$y^2 = cx^2 - x^3,$$

où c est une constante réelle. Faire un tracé de cette courbe pour $c = 2$. Déterminer l'ensemble des points singuliers de cette courbe.

2. Montrer que le cercle

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

ne possède pas de point singulier.

Exercice 129.— L'astroïde est la courbe de \mathbb{R}^2 d'équation

$$(x^2 + y^2 - 1)^3 + 27x^2y^2 = 0.$$

Faire un tracé de l'astroïde, puis calculer l'ensemble de ses points singuliers.

Exercice 130.— Tracer, puis calculer les points singuliers de la *séxtique de Cayley*, d'équation

$$4(x^2 + y^2 - x)^3 = 27(x^2 + y^2)^2.$$

§ 3 Calcul de l'enveloppe d'une famille de courbes

X.3.1. Famille de courbes.— Soit F un polynôme de $\mathbb{R}[x, y, t]$. Un réel t étant fixé, on notera $\mathbf{V}(F_t)$ l'ensemble algébrique affine de \mathbb{R}^2 défini par les solutions de l'équation

$$F(x, y, t) = 0.$$

On appelle *famille de courbes* engendrée par F l'ensemble des $\mathbf{V}(F_t)$, lorsque t parcourt \mathbb{R} .

X.3.2. Exemple.— Soit $F = (x - t)^2 + (y - t^2)^2 - 4$. Pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, F définit un cercle de \mathbb{R}^2 d'équation

$$(x - t)^2 + (y - t^2)^2 = 4.$$

Voici un tracé de quelques cercles de cette famille :

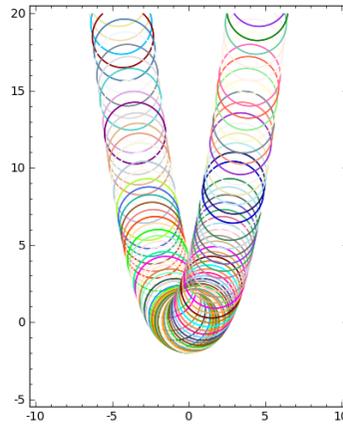


FIGURE X.3.: Famille de cercles.

Exercice 131. — On considère la parabole de \mathbb{R}^2 défini par

$$(x-t)^2 - y + t = 0,$$

où t est un paramètre réel. Tracer une famille de telles paraboles.

X.3.3. Enveloppe de courbes.— Soit $\mathbf{V}(F_t)$ une famille de courbes dans \mathbb{R}^2 . L'enveloppe de la famille $\mathbf{V}(F_t)$ peut se décrire intuitivement comme la courbe qui est tangente à toutes les courbes de la famille. La discussion sur cette notion géométrique dépasse le cadre de ce cours. Formellement, on définira l'enveloppe de la famille $\mathbf{V}(F_t)$ comme l'ensemble des points (x, y) de \mathbb{R}^2 vérifiant, pour tout réel t , les équations suivantes

$$\begin{cases} F(x, y, t) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0 \end{cases}$$

X.3.4. Exemple.— Reprenons l'exemple X.3.2. Si $F = (x-t)^2 + (y-t^2)^2 - 4$, l'enveloppe de la famille $\mathbf{V}(F_t)$ est définie par les équations

$$\begin{cases} (x-t)^2 + (y-t^2)^2 - 4 = 0 \\ 4t^3 - 4ty + 2t - 2x = 0 \end{cases}$$

On calcule une base de Gröbner de l'idéal $I = \left\langle F, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle$, avec l'ordre lexicographique induit par $y < x < t$. On obtient $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}$, avec

$$\begin{aligned} g_1 &= t^2 + \frac{32}{135}txy^2 + \frac{8}{27}txy + \frac{26}{135}tx - \frac{16}{135}x^4 - \frac{16}{135}x^2y^2 + \frac{8}{135}x^2y + \frac{37}{45}x^2 \\ &\quad - \frac{16}{135}y^3 + \frac{32}{135}y^2 + \frac{64}{135}y - \frac{128}{135} \\ g_2 &= tx^2 - \frac{2}{9}ty^3 + \frac{7}{6}ty^2 - \frac{3}{8}ty - \frac{697}{288}t - \frac{1}{9}x^5 - \frac{1}{9}x^3y^2 + \frac{7}{18}x^3y + \frac{29}{48}x^3 + \frac{1}{3}xy^3 \\ &\quad - \frac{1}{9}xy^2 - \frac{161}{144}xy - \frac{23}{288}x \\ g_3 &= txy^3 + \frac{3}{4}txy^2 + \frac{3}{16}txy - \frac{431}{64}tx - \frac{1}{2}x^4y + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2y^3 + \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{107}{32}x^2y \\ &\quad + \frac{159}{64}x^2 - \frac{1}{2}y^4 + \frac{5}{4}y^3 + \frac{183}{32}y^2 - 5y - \frac{119}{8} \\ g_4 &= ty^4 - \frac{7}{2}ty^3 - 3ty^2 - \frac{241}{32}ty + \frac{7327}{256}t + \frac{1}{2}x^5y + \frac{7}{8}x^5 + \frac{1}{2}x^3y^3 - \frac{7}{8}x^3y^2 - \frac{185}{32}x^3y \\ &\quad - \frac{1473}{128}x^3 - \frac{3}{2}xy^4 - \frac{17}{8}xy^3 - \frac{99}{32}xy^2 + \frac{1461}{128}xy + \frac{6929}{256}x \\ g_5 &= x^6 + x^4y^2 - \frac{5}{2}x^4y - \frac{191}{16}x^4 - 2x^2y^3 - 6x^2y^2 + \frac{15}{8}x^2y + 43x^2 + y^4 - \frac{17}{2}y^3 + \frac{225}{16}y^2 + 34y - \frac{289}{4}. \end{aligned}$$

D'après le théorème d'élimination, le premier idéal d'élimination $I \cap \mathbb{R}[x, y]$ est engendré par le polynôme g_5 . Par suite, l'enveloppe est contenue dans l'ensemble algébrique affine $\mathbf{V}(g_5)$.

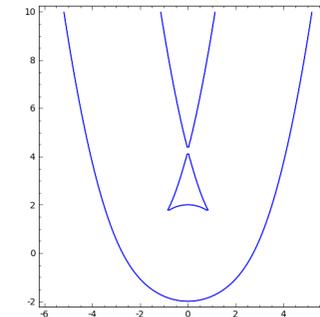


FIGURE X.4.: Enveloppe de la famille $(x-t)^2 + (y-t^2)^2 = 4$.

Exercice 132. — Calculer l'enveloppe de la famille de parabole de l'exercice 131.

Exercice 133. — Pour les familles de courbes suivantes, faire un tracé de quelques éléments de la famille, calculer l'enveloppe de la famille, puis tracer cette enveloppe.

1. $(x-t)^2 + y^2 = \frac{1}{2}t^2$, $t \in \mathbb{R}$,
2. $(x-t)^2 + (y-t^2)^2 = t^2$, $t \in \mathbb{R}$.

X.3.5. Remarque.— Notre définition sur les enveloppes reste bien intuitive. En effet, considérons la famille \mathcal{C} composée des cercles de rayon 1 et dont le centre se trouve sur l'axe des abscisses x .

Exercice 134. — Déterminer l'enveloppe de la famille \mathcal{C} .

Exercice 135. —

1. Déterminer l'enveloppe de la famille de courbes définie par l'équation

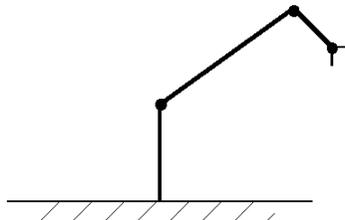
$$(x - t^3)^2 + y^2 = 1.$$

2. Tracer cette enveloppe et comparer avec le résultat de l'exercice précédent.

§ 4 Une application en robotique

L'objectif est d'étudier les configurations géométriques d'un bras robotisé. Pour cette étude, nous allons faire quelques hypothèses simplificatrices sur les éléments constitutifs du bras. Même en considérant une version idéalisée, il est possible de présenter cette problématique importante en robotique.

On s'intéresse au problème de la réalisation des mouvements et de la description de l'espace des mouvements possibles d'un bras robotisé de la forme

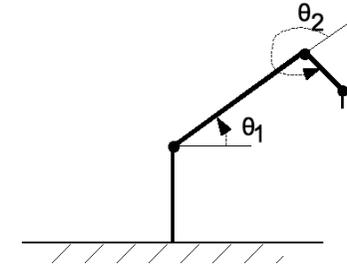


X.4.1. Modélisation géométrique d'un robot.— On considère des robots planaires, dont l'évolution est dans le plan, ou spatiaux, dont l'évolution est dans l'espace. Les bras robotisés que nous considérons possèdent deux extrémités :

- la première est fixée au socle et supporte le bras du robot ;
- l'autre extrémité est la partie terminale, appelé *main*, qui réalise la tâche du robot : perçage, vissage, peinture, ...

Un robot est ainsi vu comme une réunion de segments et de joints ; on considère des joints de deux types :

- les *rotules* qui permettent de faire une rotation d'un segment relativement à un autre (dans le cas planaire, on suppose que les mouvements se déroulent dans un même plan). La rotation entre deux segments est repérée par son angle θ , ainsi l'ensemble des positions d'une rotule est paramétré par S^1 ;



- les *joints prismatiques* qui permettent de réaliser une translation à partir d'un segment via un bras télescopique. La position d'un tel joint est paramétrée par un intervalle de \mathbb{R} . L'ensemble des positions des joints d'un bras composé de r rotules et de p joints prismatiques est paramétré par

$$J = S^1 \times \dots \times S^1 \times I_1 \times \dots \times I_p,$$

avec r produits S^1 et où I_k est l'ensemble des positions du k -ème joint prismatique. L'ensemble J est appelé l'*espace des joints* du robot.

On repère la main du robot, à un instant donné, par un point (x_1, x_2) de \mathbb{R}^2 . Ainsi l'ensemble des positions de la main du robot décrit une partie U de \mathbb{R}^2 . À chaque point de U , on peut associer un vecteur unité u décrivant l'orientation de la main. En notant V l'ensemble des vecteurs unités associés à l'orientation de la main, le produit cartésien $C = U \times V$ est appelé l'*espace de configuration* de la main du robot. Ainsi, on peut déterminer toutes les positions de la main du robot à l'aide d'une application

$$f : J \longrightarrow C$$

reliant la position de la main avec celle de l'ensemble des joints.

On peut alors formuler deux problèmes classiques en robotique :

- **problème du mouvement avant** : peut-on donner une description explicite de f ?
- **problème cinématique inverse** : si $c \in C$, peut-on décrire $f^{-1}(c)$?

X.4.2. Le problème du mouvement avant (cas planaire).— On considère que le premier segment du bras du robot est fixé à un socle. Soit (x_1, y_1) les coordonnées du premier joint du bras. On associe au joint i un système de coordonnées $\beta_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1})$

- dont l'origine est placée au joint i ,
- l'axe positif des x_{i+1} est situé dans le prolongement du segment $i + 1$,
- l'axe des y_{i+1} est normal à l'axe des x_{i+1} .

Ainsi, pour tout $i \geq 2$, les coordonnées (x_i, y_i) du joint i sont $(l_i, 0)$, où l_i est la longueur du segment i .

On veut écrire le système de coordonnées β_{i+1} en fonction de β_i . Notons θ_i l'angle entre les axes x_i et x_{i+1} (mesuré dans le sens trigonométrique usuel). Soit q un point de \mathbb{R}^2 , on note

$$[q]_{\beta_{i+1}} = \begin{bmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \end{bmatrix}, \quad [q]_{\beta_i} = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix}$$

ses coordonnées dans les systèmes β_{i+1} et β_i respectivement. On a

$$\begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_i \\ 0 \end{bmatrix}.$$

En utilisant une représentation affine du plan dans \mathbb{R}^3 , on a

$$\begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & l_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

En posant

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & l_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

on a ainsi

$$\begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_i \begin{bmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pour un robot formé de k rotules, on aura

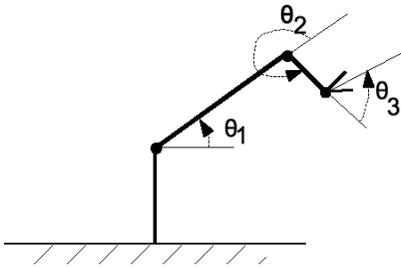
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_k \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ 1 \end{bmatrix},$$

où $\beta_1 = (x_1, y_1)$ est le système de coordonnées initial.

Comme la main est attachée au dernier joint, on obtient les coordonnées de la main dans le système β_1 en posant $x_k = y_k = 0$, d'où

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

X.4.3. Exemple.— On considère un bras avec trois rotules :



On a

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ici l'origine de $\beta_2 = (x_2, y_2)$ est placée au premier joint. On a

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & l_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & l_3 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Soit

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \sin(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Les coordonnées (x_4, y_4) de la main sont $(0, 0)$ dans le système de coordonnées du dernier joint, on a donc

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \cos(\theta_1) \\ l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \sin(\theta_1) \\ 1 \end{bmatrix}$$

X.4.4. Problème cinématique inverse (cas planaire).— Étant donné une position (a, b) de \mathbb{R}^2 et une orientation, on souhaite déterminer s'il est possible ou non de placer la main du robot à cette position et dans cette orientation. On peut procéder de la façon suivante.

Posons $c_i = \cos(\theta_i)$ et $s_i = \sin(\theta_i)$. On a la condition $c_i^2 + s_i^2 = 1$. On peut alors écrire l'image de $f : J \rightarrow C$ comme une fonction polynomiale

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix},$$

où f_1 et f_2 sont des polynômes en c_i et s_i , et f_3 un polynôme en θ_i , pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Le problème revient alors à chercher les solutions du système d'équations polynomiales :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(c_1, \dots, c_n, s_1, \dots, s_n, l_1, \dots, l_n) = a \\ g(c_1, \dots, c_n, s_1, \dots, s_n, l_1, \dots, l_n) = b \\ c_1^2 + s_1^2 = 1, \\ \vdots \\ c_n^2 + s_n^2 = 1. \end{array} \right.$$

On calcule pour cela une base de Gröbner du système relativement à l'ordre lexicographique induit par l'ordre alphabétique suivant :

$$s_1 < c_1 < \dots < s_n < c_n.$$

Les réels a, b, l_1, \dots, l_n sont des paramètres du système, on calcule la base de Gröbner dans l'anneau $\mathbb{R}(a, b, l_1, \dots, l_n)[c_1, \dots, c_n, s_1, \dots, s_n]$. En pratique, on fixera les l_i pour calculer les solutions du système.

X.4.5. Exemple.— Reprenons l'exemple X.4.3. En utilisant les formule trigonométrique

$$\begin{aligned} \cos(\theta_1 + \theta_2) &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 = c_1 c_2 - s_1 s_2, \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1 = s_1 c_2 + s_2 c_1. \end{aligned}$$

On a

$$f = \begin{bmatrix} l_3(c_1 c_2 - s_1 s_2) + l_2 c_1 \\ l_3(s_1 c_2 + s_2 c_1) + l_2 s_1 \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{bmatrix}$$

Les configurations possible du robot pour que la main atteigne la position (a, b) de \mathbb{R}^2 sont données par les solutions du système suivant

$$\begin{cases} l_3(c_1c_2 - s_1s_2) + l_2c_1 = a \\ l_3(s_1c_2 + s_2c_1) + l_2s_1 = b \\ c_1^2 + s_1^2 = 1 \\ c_2^2 + s_2^2 = 1 \end{cases}$$

Exercice 136. —

1. Calculer dans $\mathbb{Q}(a, b, l_2, l_3)[c_2, s_2, c_1, s_1]$ une base de Gröbner de l'idéal engendré par les équations du système précédent, pour l'ordre lexicographique induit par $s_1 < c_1 < s_2 < c_2$.
2. En déduire les solutions s_1, s_2, c_1, c_2 de ce système en fonction des paramètres a, b, l_2 et l_3 .

Exercice 137. — Étudier les configurations d'un bras robotisé plan constitué de quatre rotules.