

CHAPITRE VII

Applications des bases de Gröbner à la géométrie élémentaire

Sommaire

1. Traduction algébrique de problèmes de géométrie . . . . .	99
2. Conséquences d'un système d'équations algébriques et radical d'un idéal	102
3. Hypothèses implicites de genericité dans les théorèmes de géométrie . . .	104
4. Découvrir ou redécouvrir des théorèmes de géométrie . . . . .	106

Dans cette partie on illustre l'utilisation des bases de Gröbner pour retrouver de manière effective des théorèmes de géométrie élémentaire.

§ 1 Traduction algébrique de problèmes de géométrie

**VII.1.1. Droite de Gauss-Newton.**— On considère un quadrilatère convexe  $ABCD$  sans côtés parallèles et on note  $E$  le point d'intersection de  $(AB)$  avec  $(CD)$  et  $F$  le point d'intersection de  $(AD)$  avec  $(BC)$ . Soient  $I, J$  et  $K$  les milieux respectifs des trois diagonales  $[AC], [BD]$  et  $[EF]$  de ce quadrilatère complet. Alors les trois points  $I, J$  et  $K$  sont alignés.

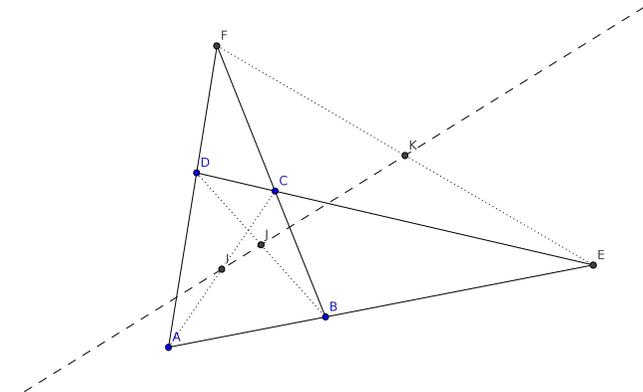


FIGURE VII.1.: Droite de Gauss-Newton

On peut retrouver ce résultat en traduisant les hypothèses géométriques par des relations polynomiales : pour cela, on considère les coordonnées des points  $A, B, C, D, F, I, J, K$  dans le plan euclidien. Sans perdre de généralités, on peut supposer que  $A$  est à l'origine et  $B$  sur l'axe des abscisses. On obtient ainsi

$$A = (0, 0), \quad B = (x_0, 0), \quad C = (x_1, x_2), \quad D = (x_3, x_4), \quad E = (x_5, 0), \\ F = (x_6, x_7), \quad I = (x_8, x_9), \quad J = (x_{10}, x_{11}), \quad K = (x_{12}, x_{13}).$$

On traduit les hypothèses géométriques en terme d'équations polynomiales :

–  $E \in (AB) \cap (CD)$  se traduit par  $\begin{vmatrix} x_5 - x_1 & x_3 - x_1 \\ -x_2 & x_4 - x_2 \end{vmatrix} = 0$ , c'est-à-dire par

$$-x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_5 + x_4x_5 = 0$$

(ici comme on a pris  $A, B$  et  $E$  sur l'axe des abscisses, l'hypothèse  $E \in (AB)$  est déjà vérifiée).

–  $F \in (AD) \cap (BC)$  se traduit par  $\begin{vmatrix} x_6 & x_3 \\ x_7 & x_4 \end{vmatrix} = 0$  et  $\begin{vmatrix} x_6 - x_0 & x_1 - x_0 \\ -x_7 & x_2 \end{vmatrix} = 0$ , c'est-à-dire par

$$-x_3x_7 + x_4x_6 = 0 \text{ et } -x_0x_2 + x_0x_7 - x_1x_7 + x_2x_6 = 0.$$

–  $I$  est le milieu de  $[AC]$  se traduit par

$$2x_8 - x_1 = 0 \text{ et } 2x_9 - x_2 = 0.$$

–  $J$  est le milieu de  $[BD]$  se traduit par

$$2x_{10} - x_0 - x_3 = 0 \text{ et } 2x_{11} - x_4 = 0.$$

–  $K$  est le milieu de  $[EF]$  se traduit par

$$2x_{12} - x_5 - x_6 = 0 \text{ et } 2x_{13} - x_7 = 0.$$

La conclusion, les trois points  $I, J$  et  $K$  sont alignés, est équivalente à

$$\begin{vmatrix} x_{10} - x_8 & x_{12} - x_8 \\ x_{11} - x_9 & x_{13} - x_9 \end{vmatrix} = 0 \text{ c'est-à-dire à}$$

$$x_8 x_{11} - x_8 x_{13} - x_9 x_{10} + x_9 x_{12} + x_{10} x_{13} - x_{11} x_{12} = 0.$$

On se place dans l'anneau  $\mathbb{R}[x_0, x_1, \dots, x_{13}]$  et on pose

$$\begin{aligned} f_1 &= -x_1 x_4 + x_2 x_3 - x_2 x_5 + x_4 x_5, & f_2 &= -x_3 x_7 + x_4 x_6, \\ f_3 &= -x_0 x_2 + x_0 x_7 - x_1 x_7 + x_2 x_6, & f_4 &= 2x_8 - x_1, \\ f_5 &= 2x_9 - x_2, & f_6 &= 2x_{10} - x_0 - x_3, \\ f_7 &= 2x_{11} - x_4 = 0, & f_8 &= 2x_{12} - x_5 - x_6, \\ f_9 &= 2x_{13} - x_7, & f &= x_8 x_{11} - x_8 x_{13} - x_9 x_{10} + x_9 x_{12} + x_{10} x_{13} - x_{11} x_{12}. \end{aligned}$$

On peut alors vérifier en calculant une base de Gröbner (ou directement avec Sage) que  $f \in \langle f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9 \rangle$ .

On en déduit que  $f = 0$  est conséquence du système  $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = f_6 = f_7 = f_8 = f_9 = 0$ .

Le code Sage pour vérifier que  $f \in \langle f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9 \rangle$  :

```
sage: R= PolynomialRing(QQ, 'x', 14)
sage: x= R.gens()
sage: f1 = (x[4]-x[2])*(x[5]-x[1])+x[2]*(x[3]-x[1])
sage: f2 = x[4]*x[6]-x[3]*x[7]
sage: f3 = x[2]*(x[6]-x[0])-(x[1]-x[0])*x[7]
sage: f4 = 2*x[8]-x[1]
sage: f5 = 2*x[9]-x[2]
sage: f6 = 2*x[10]-x[3]-x[0]
sage: f7 = 2*x[11]-x[4]
sage: f8 = 2*x[12]-x[5]-x[6]
sage: f9 = 2*x[13]-x[7]
sage: f = (x[10]-x[8])*(x[13]-x[9])-(x[11]-x[9])*(x[12]-x[8])
sage: I = (f1, f2, f3, f4, f5, f6, f7, f8, f9)*R
sage: f in I
True
```

En utilisant l'ordre lexicographique et le théorème d'élimination, on peut retrouver directement la propriété de colinéarité des points  $I, J, K$  :

```
sage: R= PolynomialRing(QQ, 'x', 14, order='lex')
sage: x= R.gens()
sage: f1 = (x[4]-x[2])*(x[5]-x[1])+x[2]*(x[3]-x[1])
sage: f2 = x[4]*x[6]-x[3]*x[7]
sage: f3 = x[2]*(x[6]-x[0])-(x[1]-x[0])*x[7]
sage: f4 = 2*x[8]-x[1]
sage: f5 = 2*x[9]-x[2]
sage: f6 = 2*x[10]-x[3]-x[0]
sage: f7 = 2*x[11]-x[4]
sage: f8 = 2*x[12]-x[5]-x[6]
sage: f9 = 2*x[13]-x[7]
sage: I = (f1, f2, f3, f4, f5, f6, f7, f8, f9)*R
sage: G = I.groebner_basis()
sage: print G
[x0 + x3 - 2*x10, x1 - 2*x8, x2 - 2*x9, x3*x9 + x6*x9 - x6*x11 -
2*x8*x13 - 2*x9*x10 + 2*x10*x13, x3*x13 - x6*x11, x4 - 2*x11, x5 + x6 -
2*x12, x6*x8*x9*x13 - 1/2*x6*x8*x13^2 + 1/2*x6*x9^2*x10 -
1/2*x6*x9^2*x12 - x6*x9*x10*x13 + 1/2*x6*x10*x13^2 - x8^2*x13^2 -
x8*x9*x10*x13 + x8*x10*x13^2 + x8*x12*x13^2 + x9*x10*x12*x13 -
x10*x12*x13^2, x6*x9*x11 + x6*x9*x13 - x6*x11*x13 - 2*x8*x13^2 -
2*x9*x10*x13 + 2*x10*x13^2, x7 - 2*x13, x8*x11 - x8*x13 - x9*x10 +
x9*x12 + x10*x13 - x11*x12]
```

**VII.1.2. Remarque.**— Pour les calculs avec Sage ci-dessus, on se limite à l'anneau des polynômes à coefficients rationnels, car les hypothèses et la conclusion sont à coefficients rationnels

et tous calculs intermédiaires (divisions, réductions, calcul de bases de Gröbner) ne font également intervenir que des des polynômes à coefficients rationnels.

**Exercice 102.**— En traduisant les hypothèses géométriques dans le repère affine  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ , retrouver le résultat sur la droite de Gauss-Newton.

**VII.1 Proposition.**— Soit  $A, B, C, D, E, F$  six points distincts du plan euclidien orienté. Les énoncés géométriques suivants s'expriment par des équations polynomiales :

1. les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles ;
2. les droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont perpendiculaires ;
3. les points  $A, B$  et  $C$  sont alignés ;
4. les distances  $AB$  et  $CD$  sont égales ;
5. le point  $C$  appartient au cercle de centre  $A$  et de rayon  $AB$  ;
6. le point  $C$  est le milieu du segment  $[AB]$  ;
7. les angles orientés  $\widehat{(AB, AC)}$  et  $\widehat{(DE, DF)}$  sont égaux modulo  $\pi$  ;
8. la droite  $(BD)$  est la bissectrice de l'angle  $\widehat{ABC}$  ;
9. le point  $C$  appartient à la médiatrice de  $[AB]$ .

**Exercice 103.**— Montrer la proposition VII.1. Pour le point 7 rappelons que

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = AB \times AC \times \sin(\widehat{AB, AC}) \text{ et } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{AB, AC})$$

**Exercice 104.**— Soit  $ABC$  un triangle. Traduire en termes d'équations polynomiales les théorèmes de géométrie suivants :

1. Les trois hauteurs de  $ABC$  se coupent en unique point, appelé l'orthocentre de  $ABC$ .
2. Les trois médianes de  $ABC$  se coupent en unique point, appelé le centre de gravité de  $ABC$ .
3. Le centre du cercle circonscrit, l'orthocentre et le centre gravité du triangle  $ABC$  sont alignés. (La droite contenant ces trois points est appelée droite d'Euler.)

## § 2 Conséquences d'un système d'équations algébriques et radical d'un idéal

**VII.2.1. Conséquences d'un système d'équations algébriques.**— Dans la partie précédente, on a étudié un théorème de géométrie dont les hypothèses et les conclusions peuvent être traduites en termes de systèmes d'équations polynomiales. De manière abstraite, la question est de résoudre le problème suivant :

Étant donnés des polynômes  $f_1, \dots, f_s, g$  de  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ , est-ce que

$$g(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ est conséquence du système } \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_s(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} ?$$

**Définition VII.2.** — Soit  $f_1, \dots, f_s, g$  des polynômes de  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ . On dit que l'équation  $g = 0$  est une *conséquence* du système d'équations  $f_1 = \dots = f_s = 0$  si  $g(a_1, \dots, a_n) = 0$  pour tout  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)$ , autrement dit si

$$g \in I(\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)).$$

**VII.2.2. Radical d'un idéal.**—

**VII.3 Proposition.** — Soit  $I$  un idéal de  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ . L'ensemble  $\sqrt{I}$  suivant, appelé *radical* de  $I$ ,

$$\sqrt{I} := \{f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \mid f^m \in I \text{ pour un entier } m\}$$

est un idéal contenant  $I$ .

- Exercice 105.** — 1. Montrer la proposition précédente.  
2. Donner un exemple d'idéal strictement inclus dans son radical.

**VII.4 Proposition.** — Soit  $f_1, \dots, f_s, g$  des polynômes de  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ . Si  $g \in \sqrt{\langle f_1, \dots, f_s \rangle}$  alors l'équation  $g = 0$  est une conséquence du système d'équations  $f_1 = \dots = f_s = 0$ .

- Exercice 106.** — 1. Montrer la proposition précédente.  
2. Donner un exemple de deux polynômes  $f$  et  $g$  de  $\mathbb{R}[x, y]$  tel que  $g = 0$  est conséquence de  $f = 0$  mais  $g \notin \sqrt{\langle f \rangle}$ .

Dans le cas du corps  $\mathbb{C}$  (et plus généralement d'un corps algébriquement clos), les deux notions sont équivalentes par le théorème des zéros de Hilbert :

**VII.5 Théorème (admis!).** — Soit  $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  alors

$$I(\mathbf{V}(f_1, \dots, f_s)) = \sqrt{\langle f_1, \dots, f_s \rangle}.$$

Autrement dit, pour tout polynôme  $g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ , l'équation  $g = 0$  est conséquence du système  $f_1 = \dots = f_s = 0$  si et seulement si  $g \in \sqrt{\langle f_1, \dots, f_s \rangle}$ .

**Exercice 107.** — Soit  $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ . On note  $\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(f_1, \dots, f_s)$  l'ensemble algébrique affine formé des points de  $\mathbb{C}^n$  satisfaisant le système  $f_1 = \dots = f_s = 0$ . Soit  $g \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ . Montrer que

$$g \in \sqrt{\langle f_1, \dots, f_s \rangle} \subseteq \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$$

si et seulement si

$$g \in I(\mathbf{V}_{\mathbb{C}}(f_1, \dots, f_s)) \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n].$$

**VII.2.3. Problème de l'appartenance au radical d'un idéal.**— La théorie suivante donne un critère pour déterminer si un polynôme appartient au radical d'un idéal :

**VII.6 Théorème (admis!).** — Soit  $f_1, \dots, f_s, g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ . Alors  $g \in \sqrt{\langle f_1, \dots, f_s \rangle}$  si et seulement si

$$1 \in \langle f_1, \dots, f_s, 1 - yg \rangle \subseteq K[x_1, \dots, x_n, y].$$

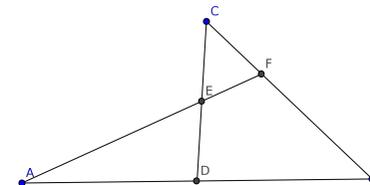
On peut donc répondre à ce problème en calculant une base de Gröbner de l'idéal  $\langle f_1, \dots, f_s, 1 - yg \rangle$ .

**Exercice 108.** — Soit  $f_1, \dots, f_s, g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  et  $I = \langle f_1, \dots, f_s, 1 - yg \rangle \subseteq K[x_1, \dots, x_n, y]$ . Soit  $G$  une base de Gröbner de  $I$  pour un ordre monomial fixé.

Montrer que  $g \in \sqrt{\langle f_1, \dots, f_s \rangle}$  si et seulement si  $G$  contient un polynôme constant.

### § 3 Hypothèses implicites de genericité dans les théorèmes de géométrie

**VII.3.1. Exemple.**— Soit  $A, B$  et  $C$  trois points du plan affine. Soit  $D$  le milieu de  $[AB]$  et  $E$  le milieu de  $[CD]$ . Si on note  $F$  le point d'intersection des droites  $(AE)$  et  $(BC)$ , on a  $FB = 2FC$ .



Sans perte de généralité, on peut supposer que  $D$  est l'origine du plan et  $A$  et  $B$  sont sur l'axe des abscisses. Ainsi, on peut choisir les coordonnées suivantes pour les points de ce problème :

$$A = (-x_0, 0), \quad B = (x_0, 0), \quad C = (x_1, x_2), \quad D = (0, 0), \quad E = (x_3, x_4), \quad F = (x_5, x_6).$$

Ce choix particulier de coordonnées assure que  $D$  est le milieu de  $[AB]$ . Traduisons en termes algébriques les autres hypothèses :

–  $E$  est le milieu de  $[CD]$  se traduit par

$$2x_3 - x_1 = 0 \text{ et } 2x_4 - x_2 = 0.$$

–  $F$  est le point d'intersection des droites  $(AE)$  et  $(BC)$  se traduit par  $\begin{vmatrix} x_5 + x_0 & x_3 + x_0 \\ x_6 & x_4 \end{vmatrix} = 0$

et  $\begin{vmatrix} x_5 - x_0 & x_1 - x_0 \\ x_6 & x_2 \end{vmatrix} = 0$ , c'est-à-dire par

$$x_0x_4 - x_0x_6 - x_3x_6 + x_4x_5 = 0 \text{ et } -x_0x_2 + x_0x_6 - x_1x_6 + x_2x_5 = 0.$$

Comme  $F \in [BC]$ , la conclusion  $FB = 2FC$  est équivalente à

$$3x_5 - 2x_1 - x_0 = 0 \text{ et } 3x_6 - 2x_2 = 0.$$

Considérons maintenant les polynômes de  $\mathbb{R}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6]$  suivants :  $f_1 = 2x_3 - x_1$ ,  $f_2 = 2x_4 - x_2$ ,  $f_3 = x_0x_4 - x_0x_6 - x_3x_6 + x_4x_5$ ,  $f_4 = -x_0x_2 + x_0x_6 - x_1x_6 + x_2x_5$ ,  $g_1 = 3x_5 - 2x_1 - x_0$  et  $g_2 = 3x_6 - 2x_2$ .

Soit  $I = \langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle$ . Alors  $g_1 \notin I$  et  $g_2 \notin I$  :

```
sage: R.<x0, x1, x2, x3, x4, x5, x6>= PolynomialRing(QQ, 'x0, x1, x2, x3, x4, x5, x6')
sage: f1 = 2*x3 - x1
sage: f2 = 2*x4 - x2
sage: f3 = (x5+x0)*x4 - (x3+x0)*x6
sage: f4 = (x5-x0)*x2 - (x1-x0)*x6
sage: g1 = 3*x5 - 2*x1 - x0
sage: g2 = 3*x6 - 2*x2
sage: I = (f1, f2, f3, f4)*R
sage: g1 in I, g2 in I
(False, False)
```

Mais, en fait  $g_1$  et  $g_2$  n'appartiennent pas non plus au radical  $\sqrt{I}$  :

```
sage: R.<x0, x1, x2, x3, x4, x5, x6, y>= PolynomialRing(QQ, 'x0, x1, x2, x3, x4, x5, x6, y')
sage: f1 = 2*x3 - x1
sage: f2 = 2*x4 - x2
sage: f3 = (x5+x0)*x4 - (x3+x0)*x6
sage: f4 = (x5-x0)*x2 - (x1-x0)*x6
sage: g1 = 3*x5 - 2*x1 - x0
sage: g2 = 3*x6 - 2*x2
sage: h1 = 1 - y*g1
sage: h2 = 1 - y*g2
sage: I1 = (f1, f2, f3, f4, h1)*R
sage: I2 = (f1, f2, f3, f4, h2)*R
sage: 1 in I1, 1 in I2
(False, False)
```

Cela signifie que les équations  $g_1 = 0$  et  $g_2 = 0$  ne sont pas conséquences du système  $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = 0$  au-dessus du corps des complexes. Dans la traduction ci-dessus on omet de traduire l'hypothèse implicite de genericité : les points  $A, B$  et  $C$  ne sont pas colinéaires ; c'est-à-dire l'hypothèse  $x_0x_2 \neq 0$ .

Pour inclure l'inéquation  $x_0x_2 \neq 0$  parmi les hypothèses, on considère une nouvelle variable  $t$  et l'équation  $1 - x_0x_2t = 0$ . Posons  $f_5 = 1 - x_0x_2t$  et  $J = \langle f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 \rangle \subseteq \mathbb{R}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, t]$ . Alors, on vérifie que  $g_1$  et  $g_2$  appartiennent à  $J$  :

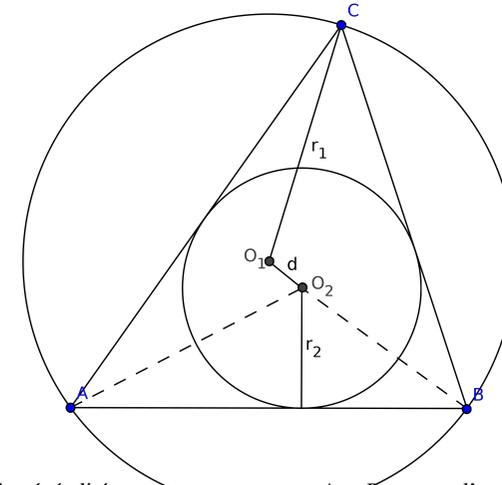
```
sage: R.<t, x0, x1, x2, x3, x4, x5, x6>= PolynomialRing(RR, 't, x0, x1, x2, x3, x4, x5, x6')
sage: f1 = 2*x3 - x1
sage: f2 = 2*x4 - x2
sage: f3 = (x5+x0)*x4 - (x3+x0)*x6
sage: f4 = (x5-x0)*x2 - (x1-x0)*x6
sage: f5 = 1 - t*x0*x2
sage: g1 = 3*x5 - 2*x1 - x0
sage: g2 = 3*x6 - 2*x2
sage: I = (f1, f2, f3, f4, f5)*R
sage: g1 in I, g2 in I
(True, True)
```

**Exercice 109.** — Dans cet exemple, il n'est pas question d'angles. On peut donc considérer le repère affine  $(D, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC})$ . Retrouver ainsi le résultat.

**Exercice 110.** — Reprendre l'exercice 104 et vérifier à l'aide du logiciel Sage que les conclusions sont des conséquences des hypothèses après ajout éventuel d'hypothèses de genericité.

## § 4 Découvrir ou redécouvrir des théorèmes de géométrie

**VII.4.1. Théorème de Poncelet.** — Dans cette partie, nous retrouvons en utilisant les bases de Gröbner, un résultat de Poncelet qui établit une relation entre les rayons des cercles inscrits et circonscrits d'un triangle et la distance entre les deux centres de ces cercles. Soit  $ABC$  un triangle,  $O_1$  le centre du cercle circonscrit de rayon  $r_1$  et  $O_2$  le centre du cercle inscrit de rayon  $r_2$ . Notons  $d$  la distance  $O_1O_2$ .



Sans perte de généralité, on peut supposer que  $A$  et  $B$  sont sur l'axe des abscisses et  $O_2$  sur l'axe des ordonnées. On obtient ainsi pour coordonnées :

$$A(x_1, 0), B(x_2, 0), O_2(0, r_2), C(x_3, x_4), O_1(x_5, x_6).$$

L'hypothèse " $(AO_2)$  est la bissectrice de  $\widehat{AB, AC}$ " s'exprime par l'équation

$$\left| \begin{array}{cc} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO_2} & \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO_2} \\ -\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO_2}) & \det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AO_2}) \end{array} \right| = 0.$$

Après calculs, on obtient

$$(x_2 - x_1)((r_2^2 - x_1^2)x_4 - 2x_1r_2(x_3 - x_1)) = 0.$$

De la même façon, on obtient pour l'hypothèse " $(BO_2)$  est la bissectrice de  $\widehat{BA, BC}$ " l'équation

$$(x_2 - x_1)((r_2^2 - x_2^2)x_4 - 2x_2r_2(x_3 - x_2)) = 0.$$

Le fait que  $O_1$  soit à l'intersection des médiatrices des segments  $[AB]$  et  $[BC]$  correspond aux égalités suivantes

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO_1} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BO_1} \text{ et } \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BO_1} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CO_1}.$$

Après calculs, on obtient

$$(x_2 - x_1)(2x_5 - x_2 - x_1) = 0 \text{ et } 2x_4x_6 + 2x_3x_5 - 2x_2x_5 - x_4^2 - x_3^2 + x_2^2 = 0.$$

Pour  $d, r_1$ , on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} d^2 - (x_6 - r_2)^2 - x_5^2 &= 0, \\ r_1^2 - x_6^2 - (x_5 - x_1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Comme on ne considère pas le cas dégénéré où  $A = B$ , on suppose que  $x_2 - x_1 \neq 0$  et on pose alors

$$\begin{aligned} f_1 &= (r_2^2 - x_1^2)x_4 - 2x_1r_2(x_3 - x_1), \\ f_2 &= (r_2^2 - x_2^2)x_4 - 2x_2r_2(x_3 - x_2), \\ f_3 &= 2x_5 - x_2 - x_1, \\ f_4 &= 2x_4x_6 + 2x_3x_5 - 2x_2x_5 - x_4^2 - x_3^2 + x_2^2, \\ f_5 &= d^2 - (x_6 - r_2)^2 - x_5^2, \\ f_6 &= r_1^2 - x_6^2 - (x_5 - x_1)^2. \end{aligned}$$

Soit l'idéal  $I = \langle f_1, \dots, f_6 \rangle \subseteq \mathbb{R}[d, r_1, r_2, x_1, \dots, x_6]$ . À l'aide de Sage(), on calcule une base de Gröbner correspondant à l'ordre lexicographique (inverse) associé à l'ordre alphabétique  $d < r_1 < r_2 < x_1 < \dots < x_6$ . Cette base comporte 97 polynômes et l'idéal d'élimination  $I \cap \mathbb{R}[d, r_1, r_2]$  est trivial d'après le code Sage() ci-dessous

```
sage: R.<d,r1,r2,x1,x2,x3,x4,x5,x6> =
PolynomialRing(QQ, 'd,r1,r2,x1,x2,x3,x4,x5,x6', order='invlex')
sage: f1 = (r2^2-x1^2)*x4-2*x1*r2*(x3-x1)
sage: f2 = (r2^2-x2^2)*x4-2*x2*r2*(x3-x2)
sage: f3 = 2*x5-x2-x1
sage: f4 = 2*x4*x6+2*x3*x5-2*x2*x5-x4^2-x3^2+x2^2
sage: f5 = d^2-(x6-r2)^2-x5^2
sage: f6 = r1^2-x6^2-(x5-x1)^2
sage: I = (f1,f2,f3,f4,f5,f6)*R
sage: G = I.groebner_basis()
Polynomial Sequence with 97 Polynomials in 9 Variables
sage: G[96].factor()
(1/4) * r2 * x1 * (-2*r1*r2 - r1^2 + d^2) * (-2*r1*r2 + r1^2 - d^2) *
(-x1^2 - r2^2 - 2*r1*r2 - r1^2 + d^2) * (-x1^2 - r2^2 + 2*r1*r2 - r1^2 +
d^2) * (r2^2*x1^2 + r2^4 - 2*r1^2*r2^2 - 2*d^2*r2^2 + r1^4 - 2*d^2*r1^2
+ d^4)
```

On ne trouve pas ainsi une relation entre  $r_1, r_2$  et  $d$ . Il faut éliminer pour cela le cas dégénéré et supposer que les points  $A, B$  et  $C$  ne sont pas colinéaires, ce qui est équivalent à  $x_2 - x_1 \neq 0$  et  $x_4 \neq 0$ .

On considère alors l'idéal  $J = \langle f_1, \dots, f_6, 1 - (x_2 - x_1)s, 1 - x_4t \rangle \subseteq \mathbb{R}[d, s, t, r_1, r_2, x_1, \dots, x_7]$ . L'idéal d'élimination  $J \cap \mathbb{R}[d, s, t]$  contient le polynôme

$$g = (d^2 - r_1^2 + 2r_1r_2)(d^2 - r_1^2 - 2r_1r_2)$$

d'après le code Sage() ci-dessous

```
sage: R.<d,r1,r2,s,t,x1,x2,x3,x4,x5,x6> =
PolynomialRing(QQ, 'd,r1,r2,s,t,x1,x2,x3,x4,x5,x6', order='invlex')
sage: f1 = (r2^2-x1^2)*x4-2*x1*r2*(x3-x1)
sage: f2 = (r2^2-x2^2)*x4-2*x2*r2*(x3-x2)
sage: f3 = 2*x5-x2-x1
sage: f4 = 2*x4*x6+2*x3*x5-2*x2*x5-x4^2-x3^2+x2^2
sage: f5 = d^2-(x6-r2)^2-x5^2
sage: f6 = r1^2-x6^2-(x5-x1)^2
sage: f7 = 1-(x2-x1)*s
sage: f8 = 1-x4*t
sage: I = (f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8)*R
sage: G = I.groebner_basis()
sage: G.parent()
Category of sequences in Multivariate Polynomial Ring in d, r1, r2,
s, t, x1, x2, x3, x4, x5, x6 over Rational Field
```

```
sage : len(G)
18
sage: G[17].factor()
(1/4) * (2*r1*r2 - r1^2 + d^2) * (2*r1*r2 + r1^2 - d^2)
```

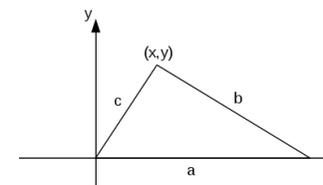
Comme  $d < r_1$ , on en déduit l'équation

$$r_1^2 - 2r_1r_2 = d^2.$$

**VII.4.2. La formule de Héron.**— La formule de Héron permet d'exprimer l'aire  $s$  d'un triangle quelconque en fonction des longueurs  $a, b$  et  $c$  de ses trois côtés :

$$s^2 = \frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).$$

Cette formule peut être obtenue par méthode d'élimination des indéterminées. Considérons le triangle suivant



**Exercice 111.**— Établir les relations suivantes :

$$b^2 = (a-x)^2 + y^2, \quad c^2 = x^2 + y^2, \quad 2s = ay.$$

Considérons l'idéal  $I$  de  $\mathbb{R}[x, y, a, b, c, s]$  engendré par les équations précédentes :

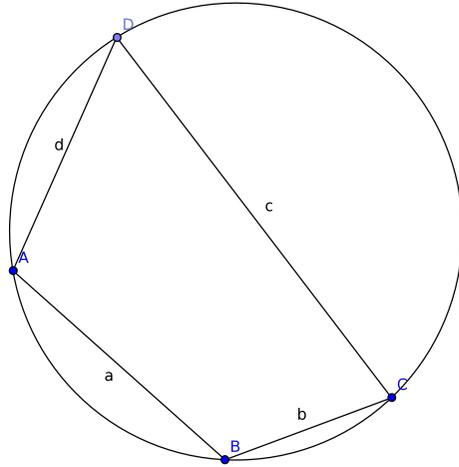
$$I = \langle b^2 - (a-x)^2 - y^2, c^2 - x^2 - y^2, 2s - ay \rangle$$

**Exercice 112.**—

1. Décrire le deuxième idéal d'élimination  $I \cap \mathbb{R}[a, b, c, s]$ .
2. En déduire la formule de Héron.
3. On pose  $p = (a+b+c)/2$  le demi périmètre du triangle. Vérifier que la formule de Héron est équivalente à

$$s^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

**VII.4.3. Formule de Brahmagupta.**— La formule de Héron se généralise aux quadrilatères convexes inscriptibles, quadrilatères dont les sommets sont sur un même cercle.



Pour un tel quadrilatère dont les cotés sont de longueurs  $a, b, c$  et  $d$ , si l'on note  $p = (a + b + c + d)/2$  le demi-périmètre du quadrilatère et  $s$  sa surface, on a alors la formule de Brahmagupta suivante :

$$s^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d).$$

(Si deux points sont confondus, on retrouve la formule de Héron.)

**Exercice 113. —**

1. En prenant pour origine le centre du cercle et pour coordonnées  $A(x_1, x_2), B(x_3, x_4), C(x_5, x_6), D(x_7, x_8)$ , traduire les hypothèses par des équations algébriques. On vérifiera en particulier que l'aire "orientée"  $s$  satisfait l'équation suivante :

$$x_5x_8 - x_1x_8 - x_6x_7 + x_2x_7 + x_3x_6 - x_4x_5 + x_1x_4 - x_2x_3 - 2s = 0.$$

2. Soit  $I$  l'idéal correspondant à ces équations. En utilisant Sage, vérifier que l'idéal d'élimination  $I \cap \mathbb{R}[a, b, c, d, s]$  est engendré par la polynôme  $g = g_1g_2$  où

$$g_1 = 16s^2 + d^4 - 2c^2d^2 - 2b^2d^2 - 2a^2d^2 - 8abcd + c^4 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2 + b^4 - 2a^2b^2 + a^4$$

et

$$g_2 = 16s^2 + d^4 - 2c^2d^2 - 2b^2d^2 - 2a^2d^2 + 8abcd + c^4 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2 + b^4 - 2a^2b^2 + a^4.$$

3. Il suit que les hypothèses entraînent que  $g_1 = 0$  ou  $g_2 = 0$ . Vérifier que  $g_1 = 0$  correspond à la formule de Brahmagupta.

---

## CHAPITRE VIII

---

### Application au coloriage de cartes

#### Sommaire

1.	Théorème des 4 couleurs . . . . .	111
2.	Coloriage d'une carte avec 3 couleurs . . . . .	112
3.	Généralisation aux graphes . . . . .	115

---

Dans cette partie, on utilise les bases de Gröbner pour déterminer si une carte (ou plus généralement un graphe) peut être coloriée en un nombre donné de couleurs.

### § 1 Théorème des 4 couleurs

En 1852, Francis Guthrie conjecture que toute carte peut être coloriée à l'aide d'au plus quatre couleurs afin que deux régions voisines aient des couleurs différentes. Cette conjecture n'est vérifiée qu'en 1976 par Appel et Haken, en utilisant 1200 heures de calculs par ordinateurs afin de vérifier 1478 configurations critiques. Depuis, cette preuve algorithmique a été simplifiée, complètement formalisée et vérifiée à l'aide de l'assistant de preuves COQ. Il n'y a pour l'instant pas de preuve se passant de calculs informatiques.

**VIII.1 Théorème (Théorème des 4 couleurs).**— Toute carte découpée en régions connexes peut être coloriée à l'aide de quatre couleurs de façon à ce que deux régions limitrophes aient deux couleurs différentes.

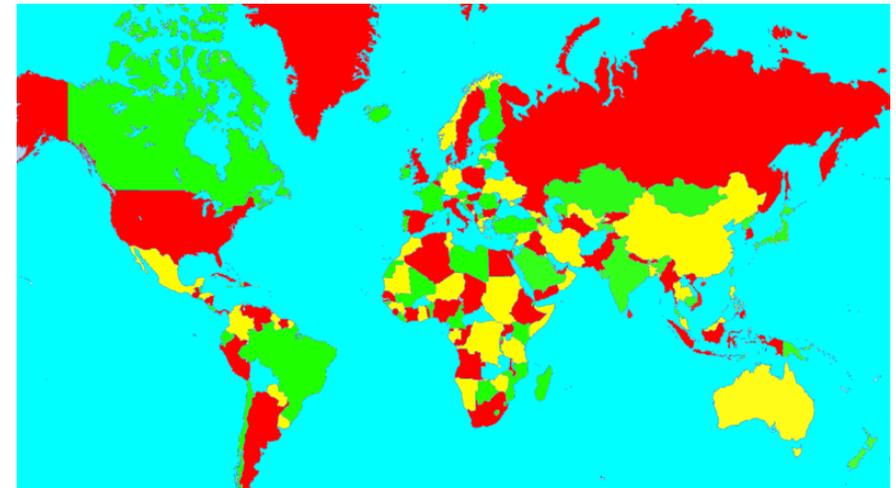


FIGURE VIII.1.: Carte du monde coloriée avec 4 couleurs (Adam Iragaël, novembre 2014)

**Exercice 114.**— Colorier avec quatre couleurs la carte suivante :

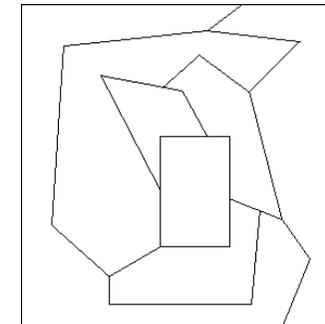


FIGURE VIII.2.: Carte à colorier

Peut-on la colorier avec seulement 3 couleurs ?

### § 2 Coloriage d'une carte avec 3 couleurs

On traduit la possibilité ou non de colorier une carte à l'aide de 3 couleurs en termes d'idéaux. Considérons une carte possédant  $n$  régions.

Ci-dessous un exemple de carte avec 8 régions :

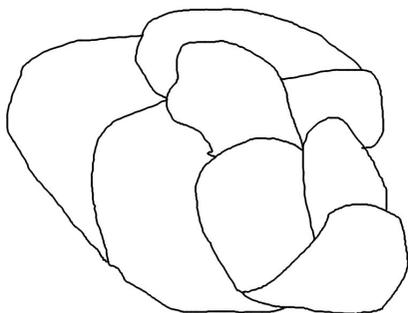


FIGURE VIII.3.: Carte 1

On représente chacune de ces régions par une indéterminée et on se place dans l'anneau de polynômes  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ . Les couleurs sont représentées par les racines 3-èmes de l'unité :  $1, j = e^{2i\pi/3}$  et  $j^2$ .

Pour chaque région  $i$ , le fait d'être coloriée par l'une de ces 3 couleurs se traduit par l'équation

$$x_i^3 = 1.$$

Pour deux régions limitrophes  $j$  et  $k$ , le fait d'avoir deux couleurs différentes se traduit par l'inéquation  $x_j \neq x_k$ . Comme on a

$$0 = x_j^3 - x_k^3 = (x_j - x_k)(x_j^2 + x_j x_k + x_k^2),$$

l'inéquation  $x_j \neq x_k$  est équivalente à l'équation

$$x_j^2 + x_j x_k + x_k^2 = 0.$$

Pour tout  $i$  et tout couple  $(j, k)$ , posons  $f_i = x_i^3 - 1$  et  $g_{j,k} = x_j^2 + x_j x_k + x_k^2$ , polynômes de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ . Soit  $V$  l'ensemble algébrique affine défini par

$$V(f_i, g_{j,k} : 1 \leq i, j, k \leq n, \text{ où } j \text{ et } k \text{ sont limitrophes}).$$

La carte donnée peut être ainsi coloriée à l'aide de seulement 3 couleurs si et seulement si  $V \neq \emptyset$ . Pour caractériser cette propriété à l'aide des bases de Gröbner, on va utiliser une version faible du théorème des zéros de Hilbert.

**VIII.2 Théorème (admis !).** — Soit  $h_1, \dots, h_s \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  alors

$$V(h_1, \dots, h_s) = \emptyset \text{ si et seulement si } 1 \in \langle h_1, \dots, h_s \rangle.$$

À l'aide de ce théorème, il suffit donc de déterminer si

$$1 \in I = \langle f_i, g_{j,k} : 1 \leq i, j, k \leq n, \text{ où } j \text{ et } k \text{ sont limitrophes} \rangle.$$

Pour cela, on calcule une base de Gröbner de  $I$ . (En fait si on calcule la base de Gröbner réduite, on aura  $1 \in I$  si et seulement si cette base est réduite au polynôme 1.)

Reprenons l'exemple ci-dessus après avoir numéroté les régions :

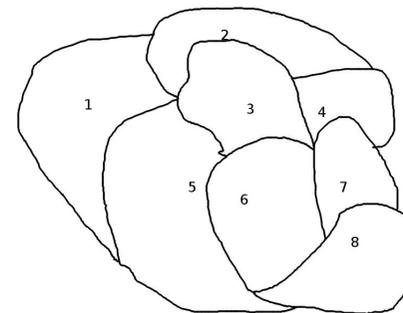


FIGURE VIII.4.: Carte 1 avec un numéro par région.

Voici un exemple de code pour déterminer si cette carte peut être coloriée à l'aide de 3 couleurs.

```
sage: R.<x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8>=PolynomialRing(QQ,'x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8')
sage: f1 = x1^3-1;f2 = x2^3-1;f3 = x3^3-1;f4 = x4^3-1;f5 = x5^3-1
sage: f6 = x6^3-1;f7 = x7^3-1;f8 = x8^3-1
sage: f12 = x1^2+x1*x2+x2^2;f15 = x1^2+x1*x5+x2^5;f23 = x3^2+x3*x2+x2^2
sage: f24 = x4^2+x4*x2+x2^2;f34 = x3^2+x3*x4+x4^2;f35 = x3^2+x3*x5+x5^2
sage: f36 = x3^2+x3*x6+x6^2;f47 = x4^2+x4*x7+x7^2;f56 = x5^2+x5*x6+x6^2
sage: f58 = x5^2+x5*x8+x8^2;f67 = x7^2+x7*x6+x6^2;f68 = x8^2+x8*x6+x6^2
sage: f78 = x7^2+x7*x8+x8^2
sage: I = Ideal(f1,f2,f3,f4,f5,f6,f7,f8,f12,f15,f23,f24,f34,f35,f36,f47,
f56,f58,f67,f68,f78)
sage: 1 in I
false
sage: I.groebner_basis()
[x8^3 - 1, x1^2 + x1*x7 - x7*x8 - x8^2, x7^2 + x7*x8 + x8^2, x2 - x7,
x3 - x8, x4 + x7 + x8, x5 - x7, x6 + x7 + x8]
```

**Exercice 115.** — 1. Écrire un code permettant de déterminer si la carte de l'exercice 114 peut être coloriée à l'aide de 3 couleurs ?

2. Faire de même avec la carte 2 ci-dessous.

3. Faire de même avec la carte des 22 régions métropolitaines en 2014 et celle des 13 régions métropolitaines à compter du 1er janvier 2016.

(Pour cet exercice, on pourra écrire un algorithme qui prendra en entrée le nombre de régions et la liste des régions limitrophes.)

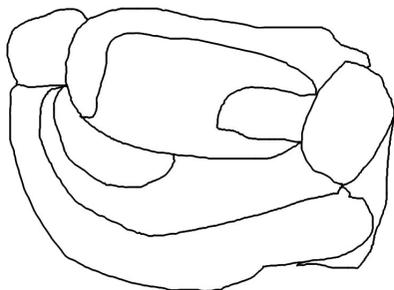


FIGURE VIII.5.: Carte 2.

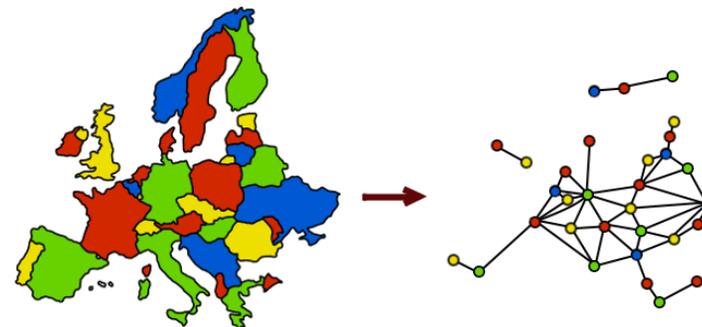


FIGURE VIII.7.: Europe sous forme d'un graphe planaire.

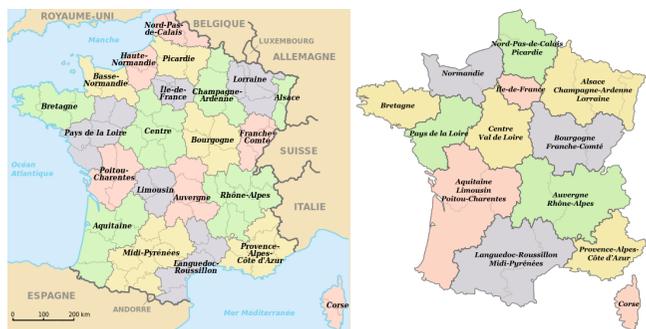


FIGURE VIII.6.: Cartes des régions de France en 2014 et à compter de janvier 2016.

**VIII.2.1. Remarque.**— L'algorithme utilisant le calcul des bases de Gröbner pour déterminer si une région peut être coloriée en 3 couleurs n'est pas rapide : la complexité du calcul d'une base de Gröbner d'un idéal défini comme ci-dessus est exponentielle en  $n$ . Il n'y a a priori pas d'algorithme rapide car ce problème est  $NP$ -complet.

**Exercice 116.**— Donner un exemple de carte qui ne peut pas être coloriée avec seulement 3 couleurs et possédant un minimum de régions.

**Exercice 117.**— Montrer que le théorème VIII.2 est un corollaire du théorème VII.5.

### § 3 Généralisation aux graphes

Une carte peut être représentée par un graphe non orienté dont les sommets sont les régions et les arêtes les couples de régions limitrophes. En fait, toute carte correspond à un graphe *planaire*, c'est-à-dire un graphe qui peut être dessiné dans le plan sans que deux arêtes ne se croisent.

La question se généralise au coloriage de n'importe quel graphe fini en un nombre donné  $m$  de couleurs, tel que deux sommets adjacents aient des couleurs différentes. Rappelons qu'un graphe fini non orienté est la donnée d'un ensemble fini de sommets  $\Gamma$  que l'on peut numéroté de 1 à  $n$  et d'une relation binaire  $R$  sur  $\Gamma$  qui est antiréflexive et symétrique.

On représente alors les  $m$  couleurs par les racines  $m$ -èmes de l'unité dans  $\mathbb{C}$ . Pour chaque sommet  $i$  de  $\Gamma$ , le fait d'être coloriée par l'une des couleurs se traduit par l'équation

$$x_i^m = 1.$$

Pour deux sommets adjacents  $j$  et  $k$  (c.à.d. tels que  $(j, k) \in R$ ), le fait d'avoir deux couleurs différentes se traduit par l'inéquation  $x_j \neq x_k$ . Comme on a

$$0 = x_j^m - x_k^m = (x_j - x_k)(x_j^{m-1} + x_j^{m-2}x_k + x_j^{m-3}x_k^2 + \dots + x_jx_k^{m-2} + x_k^{m-1}),$$

l'inéquation  $x_j \neq x_k$  est équivalente à l'équation

$$x_j^{m-1} + x_j^{m-2}x_k + x_j^{m-3}x_k^2 + \dots + x_jx_k^{m-2} + x_k^{m-1} = 0.$$

On considère l'idéal  $I$  défini de manière analogue à la partie précédente. Le graphe peut alors être colorié avec  $m$  couleurs si et seulement si l'idéal  $I$  ne contient pas le polynôme constant 1.

**Exercice 118.**— Expliquer comment on peut utiliser cette modélisation pour décider si un problème de Sudoku a une solution ou non.

		5		2				
		7	9					3
3	8	1						4
			4	6			1	7
5	7			1	2			
7						3	2	1
8					9	4		
				5		8		

FIGURE VIII.8.: Exemple de grille de Sudoku.