

Fiche d'exercices n° 3 : Développements limités

Exercice 1. Calculer les développements limités au voisinage de 0 des fonctions usuelles suivantes

1. $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4.
2. $\cos(x) \ln(1+x)$ à l'ordre 4.
3. $\ln^2(1+x)$ à l'ordre 4.
4. $\frac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3.
5. $(x^3 + 1)\sqrt{1-x}$ à l'ordre 3.

Exercice 2. Calculer les développements limités au voisinage de 0 des composés de fonctions suivantes

1. $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4.
2. $e^{\sin x}$ à l'ordre 4.
3. $(\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5.

Exercice 3. Calculer les développements limités au voisinage de 0 de rapports entre fonctions

1. $\tan x$ à l'ordre 5.
2. $\frac{\sin(x) - 1}{\cos(x) + 1}$ à l'ordre 2.
3. $\frac{\ln(1+x)}{\sin x}$ à l'ordre 3.

Exercice 4. Développements limités au voisinage de 0 d'opérations sur les fonctions usuelles.

1. $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ à l'ordre 3.
2. $\ln(1+3x)$ à l'ordre 3.
3. $e^x - 1 + \sin x - 2x - \frac{x^2}{2}$ à l'ordre 4.
4. $\frac{e^x}{\cos x}$ à l'ordre 3.
5. $\frac{\cos x}{e^x}$ à l'ordre 3.

Exercice 5. Développements limités au voisinage d'un point $x_0 \neq 0$.

1. \sqrt{x} au voisinage de 2 à l'ordre 3.
2. $\sin x$ au voisinage de $\frac{\pi}{3}$ à l'ordre 3.
3. $\frac{\ln x}{(1+x)^2}$ au voisinage de 1 à l'ordre 2.
4. x^3 au voisinage de 1 à l'ordre 4.
5. x^3 au voisinage de -1 à l'ordre 4.

Exercice 6. Calculer le développements limités au voisinage de $\pm\infty$ des fonctions suivantes

1. $\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$ à l'ordre 3.
2. $\frac{x}{x-1}\sqrt{x^2+1}$ en $+\infty$ et en $-\infty$ à l'ordre 1.
3. $e^{2/x}$ en $+\infty$ et à l'ordre 3.
4. $e^{-2/x}$ en $-\infty$ et à l'ordre 3.
5. $\frac{x^2-x}{1+x}$ en $+\infty$ et à l'ordre 2.
6. $\frac{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{2-x+x^2}}{x}$ en $+\infty$ et à l'ordre 2.

Exercice 7. Utilisation des développements limités

- a) Calculer le développement limité en 0 de la fonction $\ln(1+\sin^2(x))$ à l'ordre 3 et en déduire la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin^2(x))}{2x^2}$.
- b) Calculer le développement limité en 0 de la fonction $\ln(1+x\cos^2(x))$ à l'ordre 3 et en déduire la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x\cos^2(x))}{4x}$.
- c) Calculer le développement limité en 0 de la fonction $\ln(1-\sin^2(x))$ à l'ordre 3 et en déduire la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-\sin^2(x))}{2x^2}$.
- c) Calculer le développement limité en 0 de la fonction $\ln(1-x\cos^2(x))$ à l'ordre 3 et en déduire la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x\cos^2(x))}{3x}$.

Exercice 8. A partir des développements limités de e^{2x} et de $\cos x$ au voisinage de 0

- donner celui de $\frac{\cos x}{e^{2x}}$ au voisinage de 0 à l'ordre 2
- en déduire le développement limité de $\ln\left(\frac{\cos x}{e^{2x}}\right)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2
- calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{\cos x}{e^{2x}}\right) + 2x}{x^2}$.

Exercice 9. A partir des développements limités de e^{2x} et de $\sin 2x$ au voisinage de 0

□ donner celui de $\frac{\sin 2x}{e^{2x}}$ au voisinage de 0 à l'ordre 2

□ en déduire le développement limité de $\ln\left(\frac{\sin 2x}{2xe^{2x}}\right)$ au voisinage de 0 à l'ordre 1

□ calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{\sin 2x}{2xe^{2x}}\right) + 2x}{x}$.

Exercice 10. Calculer les limites suivantes

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{7}{x}\right)^x$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

d) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right)$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos x}{x - \sin x}$

g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{x^2 - 1}$

h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{e^x - 1 - x}$