Fiche 2-Math II analyse-Formules de Taylor

Exercice 1 :
Soit x un réel strictement positif. Montrer que :

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

En déduire une valeur approchée de $\ln(1{,}003)$ à 10^{-8} près.

Exercice 2 :
Soit x un réel tel que $0<x<1$. Montrer l'inégalité : $\mathrm{ch}(x)<1+x^2$.

Exercice 3 :
Soit a un réel strictement positif.
1°) Ecrire la formule de Taylor pour la fonction cosinus, sur l'intervalle $[0,a]$, avec le reste à l'ordre 5. Montrer que :

$$\left|\cos(a)-1+\frac{a^2}{2!}-\frac{a^4}{4!}\right|\leq\frac{a^5}{5!}$$

2°) En déduire que :

$$\frac{337}{384}-\frac{1}{3840}\leq\cos\left(\frac{1}{2}\right)\leq\frac{337}{384}+\frac{1}{3840}$$

Exercice 4 :
Montrer que pour tout $x>0$, on a les égalités :

$$0<(1+x)^{\frac{1}{3}}-1-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}<\frac{5x^3}{81}$$

Exercice 5 :
1°) Ecrire la formule de Taylor pour le logarithme népérien sur l'intervalle $[1,2]$ avec le reste à l'ordre 3. En déduire que $\frac{1}{2}<\ln(2)$.

2°) Ecrire la formule de Taylor pour l'exponentielle sur l'intervalle $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, avec le reste à l'ordre 4. En déduire, à l'aide de la question précédente que :

$$\frac{79}{48}<\sqrt{e}<\frac{79}{48}+\frac{1}{192}$$

Exercice 6 :
1°) Appliquer la formule de Taylor à la fonction $t\to\sqrt{t}$ entre 25 et 26 et avec un reste à l'ordre 2.
2°) En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de $\sqrt{26}$.

Exercice 7 :
Soit $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ une fonction de classe C^2 et soit M une constante positive. On suppose que pour tout t réel, $|\varphi''(t)|\leq M$.
Montrer que pour tous s,t de $\mathbb{R}$, on a :

$$\varphi(t)+s\varphi'(t)+\frac{s^2}{2}M\geq 0$$

En déduire que pour tout réel t, on a :

$$|\varphi'(t)|\leq\sqrt{2M}\sqrt{\varphi(t)}$$

Exercice 8 :

1°) Soit f de classe C^2 de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Montrer que quand $h \to 0$ (avec $h \neq 0$), on a :

$$\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2} \to f''(x)$$

2°) Soit $n \geq 1$, un entier. En évaluant $(1-x)^n$ et ses dérivées en $x=1$, montrer les identités :

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}p^k\binom{n}{p} \quad \text{pour tout} \quad k \in \{0,1,\dots,n-1\}$$

Et

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^{n-p}p^n\binom{n}{p} = n!$$

3°) Soit f de classe C^n de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Montrer que quand $h \to 0$ (avec $h \neq 0$), on a :

$$\sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p\binom{n}{p}f(x+(n-p)h)}{h^n} \to f^{(n)}(x)$$

Exercice 9 :

Soit f de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ une application continue. On suppose que $f(0)=0$ et $f(1)=1$. On suppose en outre que f est dérivable en 0 et en 1 et que $f'(0)=f'(1)=0$.

1°) On désigne par g l'application de $]0,1[$ par :

$$g(x)=\frac{f(x)}{x}-\frac{f(x)-1}{x-1}$$

a) Déterminer $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)$ et $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x)$. On justifiera l'existence de ces limites.

b) On prolonge alors g à $[0,1]$ en posant :

$$g(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) \qquad \text{et} \qquad g(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x)$$

Montrer que g est continue sur $[0,1]$ et en déduire, par le théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe un α dans $]0,1[$ tel que :

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha}=\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}$$

c) Montrer que $f(\alpha)=\alpha$.

2°) On suppose désormais que f est deux fois dérivable sur $[0,1]$. Soit $\alpha \in]0,1[$ tel que $f(\alpha)=\alpha$.

a) On suppose ici que $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

Ecrire la formule de Taylor pour f sur l'intervalle $[0,\alpha]$ et en déduire l'existence d'un c dans $]0,\alpha[$ tel que $f''(c) \geq 4$.

b) On suppose ici que $\alpha > \frac{1}{2}$.

A l'aide d'une méthode analogue, montrer cette fois l'existence d'un d dans $]\alpha,1[$ tel que $f''(d) \leq -4$.

c) En conclure qu'il existe un β dans $]0,1[$ tel que $|f''(\beta)| \geq 4$.