Université Lyon 1 — Année 2013-2014
Licence Portail Math-Info Première année — Analyse II

Première feuille d'exercices

1.
- ❏ Exprimer $\cos 4t$ en fonction de $\cos t$, ainsi que $\sin 4t$ en fonction de $\sin t$.
- ❏ Inversement, linéariser $\cos^5 t$, puis $\cos^4 t \sin^2 t$.

2. Résoudre les équations suivantes
- ❏ $2^{\sin^2 t} = \cos t$;
- ❏ $\cos 4t = \sin 7t$;
- ❏ $\cos(\sin t) = \sin(\cos t)$.

3. Soient a, b deux nombres réels. Trouver deux constantes r, t_0 telles que

$$a \cos t + b \sin t = r \cos(t - t_0) \quad \text{quelque soit } t \in \mathbb{R}.$$

4. Calculer les sommes suivantes :
- ❏ $1 + \binom{n}{1} \cos t + \binom{n}{2} \cos 2t + \cdots + \binom{n}{n} \cos nt$;
- ❏ $\binom{n}{1} \sin t + \binom{n}{2} \sin 2t + \cdots + \binom{n}{n} \sin nt$;
- ❏ $\sum_{k=0}^{n} \cos kt$;
- ❏ $\sum_{k=0}^{n} \sin kt$.

5. On se donne la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour $t \in \mathbb{R}$ par

$$f(t) = \cos(3t) \cos^3 t.$$

- ❏ Montrer que f est paire et 2π périodique.
- ❏ Étudier les variations de f puis construire sa courbe représentative.

6.
- ❏ Rappeler rapidement les sens de variation des fonctions usuelles suivantes : $x \mapsto ax + b$ (où a, b constantes) ; $x \mapsto e^x$; $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^3$; $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \mapsto \ln(x)$; $x \mapsto 1/x$.
- ❏ Déterminer, **sans calcul de dérivée**, le tableau de variation des fonctions suivantes. On commencera par donner l'ensemble de définition.
  - $f_1 : x \mapsto e^{2x+1}$;
  - $f_2 : x \mapsto \sqrt{-x}$;
  - $f_3 : x \mapsto \sqrt{e^x + 2}$;
  - $f_4 : x \mapsto \ln(x^2 + 1)$;
  - $f_5 : x \mapsto \frac{1}{x+2}$;
  - $f_6 : x \mapsto \frac{1}{1+1/x}$;
  - $f_7 : x \mapsto \ln(x)^2$.

7. On note

$$f(x) = (1 - x) \ln(1 - x) + x \quad \text{et} \quad g(x) = -\frac{\ln(1 - x)}{x}$$

- ❏ Pour quels nombres réels x ces expressions sont-elles bien définies ?
- ❏ Etudier les variations de f sur l'intervalle $[0, 1[$. En déduire que f est à valeurs positives.
- ❏ Etudier les variations de g sur l'intervalle $]0, 1[$.

- ❏ Déterminer les limites éventuelles de g aux points 0 et 1.

8. Résoudre chacune des équations suivantes, d'inconnue réelle x :
- ❏ $x^{\ln(x)-1} = e^6$;
- ❏ $x^{\left(x^{\sqrt{x}}\right)} = (x^x)^{\sqrt{x}}$;
- ❏ $\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{1}{2}(\ln x + \ln 3)$.

9. Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$.
- ❏ Soit g la fonction numérique définie par $g(x) = x^2 - 1 + \ln x$. Dresser le tableau de variations de cette fonction, et en déduire qu'il existe un et un seul réel x_0 tel que $g(x_0) = 0$. Déterminer x_0.
- ❏ En déduire les variations de f
- ❏ Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
- ❏ Déterminer les asymptotes au graphe de f.
- ❏ Tracer ce graphe et son asymptote en faisant figurer les tangentes remarquables.

10. Simplifier les expressions suivantes :
- ❏ $\exp\left(\ln(7+5\sqrt{2}) + 8\ln(\sqrt{2}+1) + 7\ln(\sqrt{2}-1)\right)$;
- ❏ $xe^{\frac{1}{2}|\ln(x^2)|}$, où x est un nombre réel quelconque.

Résoudre
- ❏ $3^{4x} = 9^{\frac{8x-5}{8x-8}}$;
- ❏ $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

11.

Montrer que pour tous réels x, y distincts, on a
$$e^{\frac{x+y}{2}} < \frac{e^x + e^y}{2}.$$

12.

Vérifier les formules suivantes
- ❏ $\text{sh }(a+b) = \text{sh }(a)\text{ch }(b) + \text{sh }(b)\text{ch }(a)$;
- ❏ $\text{ch }(a+b) = \text{ch }(a)\text{ch }(b) + \text{sh }(b)\text{sh }(a)$;
- ❏ $\text{th }(a+b) = \frac{\text{th }(a)+\text{th }(b)}{1+\text{th }(a)\text{th }(b)}$.

13.

Montrer que l'on a, pour x et y réels :
$$\text{sh } x + \text{sh } y = 2\text{sh }\frac{x+y}{2}\text{ch }\frac{x-y}{2}, \qquad \text{ch } x - \text{ch } y = 2\text{sh }\frac{x+y}{2}\text{sh }\frac{x-y}{2}.$$

14.

Résoudre les équations :
$$2\text{ch } x + 3\text{sh } x = 1, \qquad \text{ch } x + 2\text{sh } x = 1 \text{ et } \quad 3\text{ch } x + 2\text{sh } x = 4.$$

15.

Calculer :
$$\lim_{x\to+\infty} \ln(\text{ch } x) - x, \qquad \lim_{x\to+\infty} e^{1-\text{th } x} \text{ et } \quad \lim_{x\to 0}(1+\text{th } x)^{1/\text{sh } x}.$$

16.

Etudier les variations et tracer le graphe des fonctions numériques suivantes :

$$f(x) = \text{th } \frac{1}{x}, \qquad h(x) = \text{th } x - \frac{1}{\text{ch } x}.$$

17. A l'aide du produit $(2+i)(3+i)$, montrer que

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}.$$

18. Calculer

❏ $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\arcsin\left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, $\arctan\left(\tan\frac{\pi}{7}\right)$;

❏ $\arctan\left(\tan\frac{4\pi}{7}\right)$, $\arccos\left(\cos\frac{82\pi}{11}\right)$.

19. On considère la fonction numérique définie par

$$f(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}.$$

❏ Déterminer l'ensemble de définition de f.
❏ Déterminer les limites éventuelles aux bornes de son ensemble de définition.
❏ Calculer la dérivée $f'(x)$ puis étudier les variations de f.
❏ Déterminer les tangentes ou demi-tangentes éventuelles au graphe de f aux points d'abscisses respectives -1 et 1, et tracer sommairement le graphe de f. En quels points est-elle dérivable ?
❏ Mêmes questions pour $g(x) = \arcsin\frac{2x}{1-x^2}$.

20. Tracer les graphes des fonctions numériques :

$$t \mapsto \arccos(\cos t), \quad t \mapsto \arcsin(\sin t) \quad \text{ et } t \mapsto \arctan(\tan t)$$

21. Soit f la fonction numérique donnée par $f(u) = 3\text{ch } u - 4$ et g la fonction numérique donnée par $g(u) = \arcsin(3\text{ch } u - 4)$.

❏ Montrer que pour tout réel u, on a :

$$u \in [-\ln 3, \ln 3] \quad \text{si et seulement si} \quad f(u) \in [-1, 1].$$

❏ Déterminer l'ensemble de définition de g et préciser l'ensemble des points où g est continue.
❏ En précisant son domaine de validité, montrer la formule

$$g'(u) = \frac{3\text{sh } u}{\sqrt{3(\text{ch } u - 1)(5 - 3\text{ch } u)}}.$$

❏ Déterminer les limites de cette expression aux bornes de son domaine de validité.
Indication : $\text{sh}^2(u) = (\text{ch } u - 1)(\text{ch } u + 1)$
❏ Déterminer l'ensemble des points où g est dérivable.
❏ Dresser le tableau de variation de g puis tracer son graphe.