Fiche 6 : Applications linéaires II

Exercice 1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$. On pose,

$$f_1 = e_1 + 2e_2 - 2e_3,\ f_2 = 4e_1 + 7e_2 - 6e_3 \text{ et } f_3 = -3e_1 - 5e_2 + 5e_3.$$

a. Vérifier que $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

b. Écrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

c. Soit v le vecteur de $\mathbb{R}^3$ de matrice $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$. Calculer la matrice de v dans la base $\mathcal{B}$.

d. Soit w le vecteur de $\mathbb{R}^3$ de matrice $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$. Calculer la matrice de w dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 2. Soit f l'application linéraire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + z, 4x - 2y + z)$$

pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Notons la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et celle de $\mathbb{R}^2$ par $\mathcal{C} = (f_1, f_2)$.

a. Donner la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

b. Posons $v_1 = e_1 + e_2 + e_3, v_2 = e_1 + 2e_2 + 4e_3$ et $v_3 = e_1 + 3e_2 + 9e_3$. Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

c. Expliciter la matrice de passage Q de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$. Ensuite, calculer Q^{-1}.

d. Posons $w_1 = f_1 + f_2$ et $w_2 = f_2$. Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{C}' = (w_1, w_2)$ forme une base de $\mathbb{R}^2$.

e. Expliciter la matrice de passage P de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$. Ensuite, calculer P^{-1}.

f. En déduire la matrice de f dans les base $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{C}'$.

Exercice 3. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ une application linéaire.

a. Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_m)$ de $\mathbb{K}^m$ telle que $(e_{r+1}, \ldots, e_m)$ est une base du noyau de f, pour un entier $r \in \{0, \ldots, m\}$.

b. Vérifier que $(f(e_1), \ldots, f(e_r))$ est une base de l'image de f.

c. En déduire qu'il existe des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de $\mathbb{K}^m$ et de $\mathbb{K}^n$, respectivement, dont la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est donnée par

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\
0 & \ddots & \ddots & & & & & & \vdots\\
\vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & & & \vdots\\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots\\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

Exercice 4. Donner des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ comme dans l'exercice précédent pour l'application u de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z,w) = (x+z+w, -x+y-2w, -y-z+w).$$

Exercice 5. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(e_1) = 13e_1 + 12e_2 + 6e_3, \qquad f(e_2) = -8e_1 - 7e_2 - 4e_3, \qquad f(e_3) = -12e_1 - 12e_2 - 5e_3,$$

où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

a. Donner la matrice de f dans la base canonique.

b. Posons $v_1 = 2e_1 + 3e_2, v_2 = 3e_2 - 2e_3$ et $v_3 = 2e_1 + 2e_2 + e_3$. Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

c. Exprimer l'image de $\mathcal{B}$ par f dans la base $\mathcal{B}$. En déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 6. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique. On pose,

$$f_3 = (-1,1,1),\ f_2 = u(f_3) - f_3 \text{ et } f_1 = u(f_2) - f_2.$$

a. Calculer les coordonnées de f_2 et f_1 dans la base canonique.

b. Vérifier que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

c. Donner la matrice N de u dans la base $\mathcal{B}$.

d. Vérifier que pour tout entier $n \geq 0$,

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e. En utilisant la matrice de passage P de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$, calculer pour tout $n \geq 0$, la matrice A^n, puis $u^n(1,1,1)$.

Exercices à préparer pour le contrôle.

Exercice 1. Soit $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ une base de $\mathbb{R}^4$ et λ un réel. On considère l'endomorphisme u_λ défini par

$$u(f_1) = f_1 + \lambda f_4,\ u(f_2) = f_2 - \lambda f_3,\ u(f_3) = 2f_3 + \lambda f_4 \text{ et } u(f_4) = -\lambda f_3 + (\lambda - 4) f_4.$$

a. Donner la matrice A_λ de u_λ dans la base $\mathcal{B}$.

b. Pour quelle valeur de λ, l'endomorphisme u_λ est-il bijectif ?

Exercice 2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$u(x, y, z) = (-x + y + z, -6x + 4y + 2z, 3x - y + z).$$

a. Écrire la matrice A de f dans la base canonique :

b. Calculer A^2 et en déduire que $f \circ f = 2f$.

c. En déduire que si $v \in \mathrm{Im} f$ alors $f(v) = 2v$.

d. Montrer à l'aide de la question précédente que $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

e. En déduire que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$.

f. Trouver une base (e_1, e_2, e_3) telle que f a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dans cette base.