Fiche 4 : Déterminants

Exercice 1. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & k+1 & k+2 \\ 1 & k+2 & 2k+4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos a & 1 & -\sin a \\ 0 & 2 & 0 \\ \sin a & 0 & \cos a \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 & -1 \\ -14 & 1 & 1 & 3 \\ 7 & 10 & 2 & -2 \\ 28 & -2 & -2 & 35 \end{pmatrix}$.

Calculer AB et $\det B$.

Exercice 3. Soit M la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

Calculer ${}^tMM$; en déduire la valeur du déterminant de M.

Qu'est-ce qu'on peut en déduire pour le produit $(a+bI+cJ+dK)(p+qI+rJ+sK)$ de l'exercice 7 de la fiche 4 ?

Exercice 4. Déterminer les nombres complexes λ tels que la matrice $A - \lambda I_n$ ne soit pas inversible, avec

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Montrer que les matrices suivantes ont déterminant zéro :

$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 10 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 6. Calculer à l'aide du pivot de Gauß les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique : ${}^tA = -A$. Démontrer que, si A est inversible, alors n est nécessairement un nombre pair.

Exercice 8. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j}$ une matrice carrée d'ordre n dont les coefficients sont des entiers impairs. Montrer que $\det A$ est un entier, et que celui-ci est divisible par 2^{n-1}.

Exercice 9. Calculer le déterminant de la matrice suivante avec la formule de Laplace :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 7 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Exercice 10. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que $AB = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$. Montrer que $\det(A) = \det(B) = 0$.

Exercice 11. Soient λ et μ deux réels et $A(\lambda, \mu)$ la matrice :

$$A(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \mu \\ -1 & \mu & \lambda \\ 1+\lambda+\mu & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

a. Calculer le déterminant de $A(\lambda, \mu)$.

b. Déterminer en fonction de λ et μ le rang de la matrice $A(\lambda, \mu)$.

Exercice 12. Calculer l'inverse des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 13. Montrer que

$$\begin{pmatrix} 1 & X_1 & X_1^2 & \dots & X_1^{n-1} \\ 1 & X_2 & X_2^2 & \dots & X_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \dots & \vdots & \\ 1 & X_n & X_n^2 & \dots & X_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_j - X_i)$$

.

Exercices à préparer pour le contrôle.

Exercice 1. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

a.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1+2k & 3k & k+2k^2 \\ 2 & 3 & 2k \\ 1 & 2 & k+1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Calculer AB, $\det AB$, $\det A$ et $\det B$.

Exercice 3. Calculer le déterminant de la matrice suivante en utilisant la formule de Laplace :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Calculer le déterminant de la matrice suivante en utilisant le pivot de Gauß :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale, c.à.d. $AA^T = I$.

Quelles sont les valeurs possibles pour $\det A$?

Pour chaque valeur trouvée, donner un example pour une matrice orthogonale 2×2 avec ce déterminant.

Exercice 6. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $A(\lambda)$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & \lambda \\ 2\lambda - 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

a. Calculer le déterminant de $A(\lambda)$.

b. Déterminer en fonction de λ le rang de la matrice $A(\lambda)$.

Exercice 7. Calculer l'inverse de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$