Université Claude Bernard Lyon 1 - printemps 2014
Licence Sciences, Technologies, Santé - mention mathématiques

Algèbre appliquée - MAT2054L

CONTRÔLE FINAL

- VENDREDI 6 JUIN, DURÉE 2H -
Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.

EXERCICE 1

On se place dans l'anneau de polynômes $\mathbb{Q}[x_1, x_2, y_1, y_2]$ muni de l'ordre lexicographique $x_1 > x_2 > y_1 > y_2$. On considère l'idéal

$$I = \langle x_1^2 x_2^2 - y_1, x_1 x_2^3 - y_2 \rangle.$$

1. Calculer une base de Gröbner G de I.
2. Calculer la forme normale de $x_1^5 x_2^7$ modulo G.
   Vérifier qu'elle est de la forme $y_1^{a_1} y_2^{a_2}$ où (a_1, a_2) est une solution du système

$$\begin{cases} 2s_1 + s_2 = 5, \\ 2s_1 + 3s_2 = 7. \end{cases}$$

3. Calculer la forme normale de $x_1^4 x_2^9$ modulo G.
4. Soient t_1, t_2 deux entiers positifs. On considère à présent le système

$$\begin{cases} 2s_1 + s_2 = t_1, \\ 2s_1 + 3s_2 = t_2. \end{cases} \tag{†}$$

   (a) Soient (a_1, a_2) une solution du système (†). Montrer que

$$x_1^{t_1} x_2^{t_2} \xrightarrow{I} y_1^{a_1} y_2^{a_2}.$$

   (b) Montrer que $y_1^{a_1} y_2^{a_2}$ est déjà sous forme normale modulo G.
   (c) En utilisant la question 3, en déduire que le système (†) avec $t_1 = 4$ et $t_2 = 9$ n'a pas de solutions entières positives.

EXERCICE 2

On travaille dans l'anneau de polynômes $\mathbb{K}[x,y]$ muni de l'ordre lexicographique $x > y$. Pour $n \geq 1$, un entier, on définit l'idéal

$$I_n = \langle (x+y)^n, xy \rangle.$$

1. Calculer une base de Gröbner de l'idéal I_1.
2. Soit $n \geq 1$. Montrer qu'il existe un polynôme $g \in \mathbb{K}[x,y]$ tel que

   $$(x+y)^n = x^n + y^n + xyg.$$

   En déduire que $x^n + y^n \in I_n$.
3. Montrer que $y^{n+1} \in I_n$.
   (Indication : Commencer par déduire une expression du polynôme $y(x+y)^n$ en utilisant l'égalité démontrée à la question précédente.)
4. Montrer que $(x^n + y^n, xy, y^{n+1})$ est une base de Gröbner de I_n.

EXERCICE 3

Dans l'anneau de polynômes $\mathbb{K}[x,y]$ muni de l'ordre lexicographique $x > y$, on considère les deux idéaux

$$I = \langle xy - y^2, xy^2 + y^2 \rangle \quad \text{et} \quad J = \langle xy + y^3, y^3 + y^2 \rangle.$$

1. Calculer une base de Gröbner G de I.
2. Calculer une base de Gröbner H de J.
3. Calculer la forme normale de chacun des polynômes de la base G de I modulo H, puis la forme normale de chacun des polynômes de la base H de J modulo G. Que peut-on en conclure ?