Université Claude Bernard Lyon 1 - printemps 2013
Licence Sciences, Technologies, Santé - mention mathématiques

Algèbre appliquée - MAT2054L

CONTRÔLE FINAL

- VENDREDI 14 JUIN, DURÉE 2H -

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.

EXERCICE 1

Soient I et J deux idéaux de l'anneau de polynômes $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. On définit un idéal U de $\mathbb{K}[t, x_1, \dots, x_n]$ en posant

$$U = \langle tf + (1-t)g\,;\, f \in I, g \in J\rangle.$$

1. Soient $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.
   Montrer que $tf + (1-t)g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ si et seulement si $f = g$.
2. Soient $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ et $a \in \mathbb{K}[t, x_1, \dots, x_n]$ tels que $a \neq 0$ et $g \neq 0$.
   Montrer que $a(tf + (1-t)g) \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ si et seulement si $a \in \mathbb{K}[t, x_1, \dots, x_n]$ et $f = g$.
   (Indication : écrire $a = h + tb$ avec $h \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ et $b \in \mathbb{K}[t, x_1, \dots, x_n]$.)

On admet qu'on peut déduire des questions précédentes que $U \cap \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] = I \cap J$.

3. Soit $\preccurlyeq$ un ordre monômial sur $\mathbb{K}[t, x_1, \dots, x_n]$ tel que $x_i \preccurlyeq t$ pour $i = 1, \dots, n$. Soit G une base de Gröbner de U pour cet ordre. En déduire que $G \cap \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ engendre $I \cap J$.
4. On considère maintenant les deux idéaux I' et J' suivants de $\mathbb{K}[x, y]$

$$I' = \langle x^2 - xy^3, xy - x\rangle \quad \text{et} \quad J' = \langle x - y\rangle.$$

   (a) Vérifier que l'idéal $U' = \langle tf + (1-t)g : f \in I', g \in J'\rangle$ de $\mathbb{K}[t, x, y]$ est engendré par une famille de trois polynômes que l'on déterminera.
   (b) Calculer l'intersection de I' et J'.

EXERCICE 2

Soit $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un anneau de polynômes. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme linéaire, c'est-à-dire une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de la forme

$$f(t_1, \dots, t_n) = w_1 t_1 + \cdots + w_n t_n$$

avec $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}$ fixés. Pour x^α, x^β deux monômes dans $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, on pose

$$x^\alpha \preccurlyeq x^\beta \quad \text{si} \quad f(\alpha) \leq f(\beta).$$

1. On considère le cas $n = 3$ et $f(t_1, t_2, t_3) = t_1 + 2t_2 + 4t_3$. Classer les monômes ci-dessous pour la relation $\preccurlyeq$ correspondante :

$$x_1^3, \; x_1^2x_3^2, \; x_1x_2^2x_3, \; x_3^2.$$

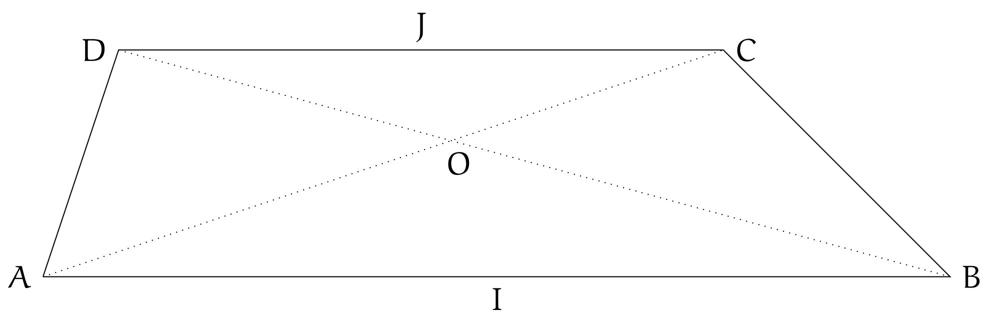
2. Soient x^α, x^β deux monômes de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ tels que $x^\alpha \preccurlyeq x^\beta$. Montrer que, pour tout monôme x^γ, on a

$$x^\alpha x^\gamma \preccurlyeq x^\beta x^\gamma.$$

3. Montrer qu'on a $x^\alpha \succcurlyeq 1$ pour tout monôme x^α si et seulement si $w_i \geq 0$ pour $i = 1, \ldots, n$.
4. Donner un exemple de forme linéaire f avec $w_i > 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ et telle que la relation $\preccurlyeq$ n'est pas un ordre monômial.
(Indication : montrer qu'on peut avoir $x^\alpha \preccurlyeq x^\beta$ et $x^\alpha \succcurlyeq x^\beta$ pour deux monômes x^α et x^β distincts.)
5. On considère le cas $n = 2$ et $f(t_1, t_2) = t_1 + \sqrt{2}t_2$. Montrer que la relation correspondante est un ordre monômial.
(Indication : utiliser le fait qu'il n'existe pas deux entiers p et q tels que $\sqrt{2} = p/q$.)

EXERCICE 3

Soit $ABCD$ un trapèze non plat. On note O l'intersection des diagonales (AC) et (BD), I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[CD]$. Le but de cet exercice est de démontrer que les points O, I et J sont alignés.



1. Expliquer rapidement pourquoi on peut supposer que A a pour coordonnées $(0, 0)$, B a pour coordonnées $(1, 0)$ et D a pour coordonnées $(0, 1)$.
En déduire que C a pour coordonnées $(x, 1)$ pour un $x \in \mathbb{R}$.
2. En utilisant les méthodes algébriques vues en cours, montrer que les points O, I et J sont alignés.
(Note : on notera (y, z) les coordonnées du point O.)