SECOND CONTRÔLE.
Durée 1h30. Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.
Le sujet est constitué de deux exercices indépendants.

EXERCICE 1

1. On note $\preccurlyeq_{\text{invlex}}$ l'ordre lexicographique sur $\mathcal{M}(x, y, z)$ induit par l'ordre alphabétique $x < y < z$. On rappelle que $\preccurlyeq_{\text{invlex}}$ est un ordre monomial, comme tout ordre lexicographique.

Classer par ordre croissant selon $\preccurlyeq_{\text{invlex}}$ les monômes suivants :

$$x^2yz^2, \quad x^3y^5z, \quad x^5y^2z^2, \quad y^7z^2, \quad xy^6.$$

2. On note $\preccurlyeq_{\text{rinvlex}}$ l'ordre renversé défini par $m_1 \preccurlyeq_{\text{rinvlex}} m_2$ si $m_2 \preccurlyeq_{\text{invlex}} m_1$ pour tous monômes m_1, m_2 de $\mathcal{M}(x, y, z)$.

i) Vérifier que $\preccurlyeq_{\text{rinvlex}}$ n'est pas un ordre monomial.

ii) $\preccurlyeq_{\text{rinvlex}}$ est-il un bon ordre ?

3. On rappelle que pour un monôme $m = x^\alpha y^\beta z^\gamma \in \mathcal{M}(x, y, z)$, son degré total est $\deg(m) = \alpha + \beta + \gamma$.

On définit un nouvel ordre $\preccurlyeq_{\text{grevlex}}$ par

$$m_1 \preccurlyeq_{\text{grevlex}} m_2 \text{ si } \deg(m_1) < \deg(m_2) \text{ ou } (\deg(m_1) = \deg(m_2) \text{ et } m_1 \preccurlyeq_{\text{rinvlex}} m_2),$$

pour tous monômes m_1, m_2 de $\mathcal{M}(x, y, z)$.

i) Classer par ordre croissant selon $\preccurlyeq_{\text{grevlex}}$ les monômes de la première question.

ii) Montrer que $\preccurlyeq_{\text{grevlex}}$ est un ordre monomial.

4. Donner un exemple de deux monômes distincts m_1 et m_2 de $\mathcal{M}(x, y, z)$ ayant chacun pour degré total 2 et vérifiant $m_1 \preccurlyeq_{\text{grevlex}} m_2$ et $m_2 \preccurlyeq_{\text{grlex}} m_1$ où $\preccurlyeq_{\text{grlex}}$ est l'ordre lexicographique gradué associé à l'ordre alphabétique $x > y > z$.

T.S.V.P.

EXERCICE 2

1. Soit $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ l'anneau des polynômes à n indéterminées et à coefficents dans un corps $\mathbb{K}$, muni d'un ordre monomial.

i) Rappeler la définition d'une base de Gröbner pour un idéal I de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

ii) Soit I un idéal de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ et $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_t\}$ une base de Gröbner de I avec $t \geqslant 2$. Montrer que si $\mathrm{lt}(g_2)$ divise $\mathrm{lt}(g_1)$ alors $\{g_2, \ldots, g_t\}$ est une base de Gröbner de I.

2. On se place dans l'anneau de polynômes $\mathbb{Q}[x, y, z]$ muni de l'ordre lexicographique gradué $\preccurlyeq_{\mathrm{grlex}}$ induit par l'ordre alphabétique $x > y > z$.

On considère les polynômes

- $f_1 = xy^2z - x^3$,
- $f_2 = y^2z - x$,
- $f_3 = x^3 - x^2$

et l'idéal $I = \langle f_1, f_2, f_3 \rangle$.

i) Vérifier que $\{f_1, f_2, f_3\}$ est une base de Gröbner de I.

ii) En déduire que $\{f_2, f_3\}$ est une base de Gröbner de I.

3. On reprend la question **2** en munissant cette fois-ci $\mathbb{Q}[x, y, z]$ de l'ordre lexicographique $\preccurlyeq_{\mathrm{lex}}$ induit par l'ordre alphabétique $x > y > z$.

Est-ce que $\{f_1, f_2, f_3\}$ est encore une base de Gröbner de I ?