PREMIER CONTRÔLE.
Durée 1h. Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.

QUESTION DE COURS

Montrer que tout bon ordre est un ordre total.

EXERCICE 1 *(Coquilles sur les polynômes f_1 et f_2. Les calculs étaient plus simples avec les polynômes prévus, voir entre parenthèse et corrigé au verso)*

On se place dans l'anneau $\mathbb{Q}[x]$ et l'on considère les polynômes suivants :
- $f_1 = x^5 + x^3 + x^2 + 1$; (polynôme prévu $f_1 = x^5 + x^3 - x^2 - 1$)
- $f_2 = x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + x + 1$; (polynôme prévu $f_2 = x^6 - x^5 + x^4 - x^2 + x - 1$)
- $f = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$;
- $g = x^5 - x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2x - 2$.

Déterminer pour chacun des polynômes f et g s'il appartient à l'idéal $\langle f_1, f_2\rangle$. Si oui, exprimer ce polynôme en fonction de f_1 et f_2.

EXERCICE 2

On se place dans l'anneau $\mathbb{Q}[x, y]$ muni de l'ordre lexicographique $\preccurlyeq_{\text{lex}}$ induit par $x > y$. Soient $f_1 = xy^2 - x$, $f_2 = x^2y - y$ et $f = x^2y^4 + x^2y$ trois polynômes de $\mathbb{Q}[x, y]$.

1. Calculer le reste r_1 de la division de f par f_1, f_2 (c'est-à-dire en utilisant l'algorithme de division en plusieurs indéterminées en prenant pour premier diviseur f_1 et second diviseur f_2).

2. Calculer le reste r_2 de la division de f par f_2, f_1.

3. On pose $f_3 = r_1 - r_2$. A-t-on $f_3 \in \langle f_1, f_2\rangle$? Si oui, déterminer deux polynômes u_1 et u_2 tels que $f_3 = u_1f_1 + u_2f_2$.

4. Calculer le reste de la division de f par f_3.

5. En déduire l'existence d'un polynôme non nul $g \in \mathbb{Q}[y]$ dans l'idéal $\langle f_1, f_2\rangle$

Correction

Cours : Soit $\leqslant$ un bon ordre sur un ensemble E non vide. Soit a et b deux éléments de E. La partie $X = \{a, b\}$ est non vide et possède donc un plus petit élément. Si le plus petit élément de X est a alors $a \leqslant b$, sinon $b \leqslant a$.

Exercice 1 (sujet donné lundi 10 mars) :

On calcule le PGCD de f_1 et f_2 : la division euclidienne de f_2 par f_1 donne $f_2 = (x+1)f_1 - 2x^3$, donc $\mathrm{PGCD}(f_1, f_2) = \mathrm{PGCD}(f_1, x^3)$. Comme 1, x, x^2 et x^3 sont les seuls diviseurs unitaires de x^3 et que x ne divise pas f_1, il suit que $\mathrm{PGCD}(f_1, x^3) = 1$.

On en déduit que $\langle f_1, f_2\rangle = \langle 1\rangle = \mathbb{Q}[x]$. En particulier, f et g sont dans $\langle f_1, f_2\rangle$.

Pour exprimer f et g en fonction de f_1 et f_2, il suffit de trouver une idéntité de Bezout à l'aide de l'algorithme d'Euclide. On obtient :

$$1 = \frac{1}{2}(x^5 + x^4 - x^2 + 1)f_1 - \frac{1}{2}(x^4 + x - 1)f_2$$

d'où

$$f = \frac{1}{2}f(x^5 + x^4 - x^2 + 1)f_1 - \frac{1}{2}f(x^4 + x - 1)f_2 \text{ et } g = \frac{1}{2}g(x^5 + x^4 - x^2 + 1)f_1 - \frac{1}{2}g(x^4 + x - 1)f_2.$$

Exercice 1 (avec les polynômes f_1 et f_2 prévus) : On calcule le PGCD de f_1 et f_2 en utilisant l'algorithme d'Euclide. On obtient :

$$x^6 - x^5 + x^4 - x^2 + x - 1 = (x^5 + x^3 - x^2 - 1)(x - 1) + 2x^3 - 2x^2 + 2x - 2$$

puis,

$$x^5 + x^3 - x^2 - 1 = (x^3 - x^2 + x - 1)(x^2 + x + 1).$$

Le PGCD de f_1 et f_2 vaut donc $x^3 - x^2 + x - 1$ et l'idéal

$$\langle f_1, f_2\rangle = \langle x^3 - x^2 + x - 1\rangle$$

Effectuons la division euclidienne de f par $x^3 - x^2 + x - 1$:

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^3 - x^2 + x - 1)(x + 2) + 2x^2 + 3.$$

Le reste est non nul, donc $f \notin \langle f_1, f_2\rangle$.

Effectuons la division euclidienne de g par $x^3 - x^2 + x - 1$:

$$x^5 - x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2x - 2 = (x^3 - x^2 + x - 1)(x^2 + 2)$$

donc $g \in \langle f_1, f_2\rangle$.

Comme $x^3 - x^2 + x - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)f_1 + \frac{1}{2}f_2$, on obtient

$$g = -\frac{1}{2}(x - 1)(x^2 + 2)f_1 + \frac{1}{2}(x^2 + 2)f_2.$$

Exercice 2

1. Division de f par f_1, f_2 : $x^2y^4 + x^2y \xrightarrow{f_1} x^2y^2 + x^2y \xrightarrow{f_1} x^2y + x^2 \xrightarrow{f_2} x^2 + y$ d'où $r_1 = x^2 + y$. Notons que $f = (xy^2 + x)f_1 + f_2 + r_1$.

2. Division de f par f_2, f_1 : $x^2y^4 + x^2y \xrightarrow{f_2} y^4 + x^2y \xrightarrow{f_2} y^4 + y$ d'où $r_2 = y^4 + y$. Notons que $f = (y^3 + 1)f_2 + r_2$.

3. La différence $f_3 = r_1 - r_2 = x^2 - y^4$ de deux restes modulo $\{f_1, f_2\}$ est toujours dans l'idéal $\langle f_1, f_2\rangle$. Par les égalités précédentes, on obtient $f_3 = -(xy^2 + x)f_1 + y^3 f_2$.

4. Division de f par f_3 : $f = (y^4 + y)f_3 + y^8 + y^5$ donc le reste de cette division est $r_3 = y^8 + y^5$

5. Notons que r_2 et r_3 sont deux réductions sous forme normale du polynôme f modulo $\{f_1, f_2, f_3\}$. Par ailleurs, comme $f_3 \in \langle f_1, f_2\rangle$, on a $\langle f_1, f_2, f_3\rangle = \langle f_1, f_2\rangle$. D'où $y^8 + y^5 - y^4 - y = r_3 - r_2 \in \langle f_1, f_2\rangle$.