PROGRAMME TRAITÉ EN COURS DE TECHNIQUES MATHÉMATIQUES DE BASE

Cours
Un cours polycopié sera distribué prochainement.
Ouvrage recommandé
Le livre de F. AYRES et E. MENDELSON : *Analyse*, collection Mini Schaum's, EdiSciences, chez Dunod, Paris, 2002.
Site
L'adresse du wiki site du module TMB est :
http://licence-math.univ-lyon1.fr/doku.php?id=p13:tmb:page

Programme traité lors du cours du 12 février 2013

Nombres complexes
Construction des nombres complexes. Addition et multiplication des nombres complexes. Inverse d'un complexe non nul. Représentation des points du plan par des nombres complexes. Interprétation de la somme de deux nombres complexes. Forme trigonométrique d'un complexe non nul. Formule d'Euler. Interprétation géométrique du produit de deux nombres complexes.

Exercices traités
1) Calculer la partie réelle, la partie imaginaire, le conjugué, le module et le carré du nombre complexe $z=1/(1+i)$.
2) Résoudre $z^2=3+4i$.
3) Module et argument de $z=1+i(3)^{1/2}$. En déduire la valeur de z^5.
4) Montrer que : $\sin x+(3)^{1/2}\cos x=2 \sin(x+(\pi/3))$, et que $\cos x-(3)^{1/2}\sin x=2 \cos(x+(\pi/3))$.
5) Linéariser $\cos^4 x$.
6) Montrer que : $\sin(\pi/5)+\sin(2\pi/5)+ \sin(3\pi/5)+ \sin(4\pi/5)=\cotan(\pi/10)$.

Programme traité lors du cours du 19 février 2013

Nombres complexes (fin)
Racines n-ième d'un nombre complexe. Résolution de l'équation du second degré à coefficients complexes. Zéros des polynômes, zéros multiples. Théorème de D'Alembert-Gauss. Factorisation des polynômes. Exemples de factorisations.

Géométrie du plan

Vecteurs du plan. Addition, multiplication par un scalaire. Vecteurs linéairement indépendants. Bases. Coordonnées cartésiennes d'un vecteur, d'un point. Produit mixte de deux vecteurs. Critère d'indépendance de deux vecteurs.

Exercices traités

1) Calculer les racines cubiques de 8.
2) Montrer que $P(z)=z^3+2(1-i)z^2+(5-4i)z-10i$ a une racine purement imaginaire. Calculer les racines de z^2+2z+5. En déduire la factorisation de P.
3) Factoriser X^3-8 sur le corps des réels et sur le corps des complexes.
4) Montrer que 3 vecteurs du plan sont toujours liés.
5) Montrer, en utilisant les nombres complexes, que le module du produit mixte de deux vecteurs est égale à l'aire du parallélogramme construit sur ces vecteurs.

Programme traité lors du cours du 26 février 2013

Géométrie de l'espace

Fin de la géométrie du plan.
Vecteurs de l'espace : définition, structure d'espace vectoriel, indépendance linéaire, base orthonormale, coordonnées cartésiennes.
Produit scalaire : définition, propriétés, interprétation, calcul en coordonnées, identité de la médiane, formule de polarisation.
Géométrie analytique dans l'espace : équation d'un plan, distance d'un point à un plan, projection d'un point sur une droite, sur un plan.

Exercices traités

1) Condition sur *a* pour que les vecteurs du plan de coordonnées *(1,-a)* et *(a,2a+1)* soient linéairement indépendants ? Aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs ?

2) Soient *A,B* deux points distincts de l'espace. Lieu des points *M* de l'espace tels que le produit scalaire des vecteurs *MA* et *MB* soit nul ? Cas du plan ?

3) On considère les points *A(a,0,0)*, *B(0,b,0)* et *C(0,0,c).*
a) Équation du plan passant par *A,B,C* ?
b) Coordonnées de la projection orthogonale de l'origine sur le plan passant par *A,B,C* ?
c) Distance de l'origine au plan passant par *A,B,C* ?

4) Distance du point *A(1,1,1)* au plan d'équation *2x-2y+z-3=0 ?* Montrer que ce plan est tangent à la sphère de centre *0* et de rayon *1*.

5) On considère les points du plan *A(1,1)*, *B(0,3)* et *C(0,1).*
a) Équation de la droite *(D)* passant par *A* et *B ?*
b) Équation de la droite *(D')* perpendiculaire à *(D)* et passant par C ?

c) Déterminer le point d'intersection des droites *(D)* et *(D')*.
d) Calculer de deux manières différentes la distance du point *C* à la droite *(D)*.

Programme traité lors du cours du 5 mars 2013

Géométrie de l'espace

Produit vectoriel : orientation de l'espace, définition du produit vectoriel, calcul en coordonnées cartésiennes. Lien avec la notion de moment. Application au calcul de la distance d'un point à une droite. Perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires et calcul de la distance entre ces deux droites.
Produit mixte : Définition, lien avec le volume d'un parallélépipède, notion de déterminant d'une matrice 3x3, calcul de ce déterminant par la règle de Sarrus, développement du déterminant selon les éléments d'une colonne, antisymétrie du déterminant. Critère d'indépendance de trois vecteurs de l'espace.

Matrices

Applications linéaires et matrices : Définition d'une application linéaire. Formes linéaires. Exemples.

Exercices traités

1) On considère les points *A(2,1,-1)*, *B(0,1,1)* et *C(3,0,2)*. a) Équation du plan passant par *A,B* et *C*. b) Calcul de la distance de l'origine au plan passant par *A,B* et *C*.

2) On considère les points *A(1,0,1)*, *A'(0,1,0)*, *B(0,1,1)* et *B'(1,1,1)*. a) Montrer que les droites *AA'* et *BB'* ne sont pas coplanaires. b) Montrer l'existence d'une perpendiculaire commune aux droites *AA'* et *BB'*. Calculer la distance entre les droites *AA'* et *BB'*.

3) Calculer le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{V_1} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{V_2} = (1,1,0)$ **et** $\overrightarrow{V_3} = (1,0,2)$**. Ces vecteurs forment-ils une base ?**

4) a) Déterminer a et b pour que l'application *f(x)=ax+b* soit linéaire de *R* sur *R*. b)Déterminer toutes les applications linéaires de R^2 dans *R*.

Programme traité lors du cours du 18 mars 2013

Applications linéaires

1) Définition (rappel). Somme d'applications linéaires, produit par un scalaire. Structure d'espace vectoriel des applications linéaires d'un espace vectoriel dans un autre. Composition d'applications linéaires.
2) Noyau et image d'une application linéaire. Surjectivité et injectivité d'une application linéaire. Isomorphisme.

3) Formes linéaires. Structure des formes linéaires en dimension infinie. Différentielle d'une fonction de deux variables.

Matrices

1) Matrices, matrices carrées, transposée d'une matrice. Matrices lignes, matrice d'une forme linéaire, matrices colonnes, matrice d'un vecteur.
2) Somme de matrices, produit par un scalaire. Produit de matrices.

Exercices traités

1) Montrer qu'une application linéaire transforme le zéro en zéro. L'application *u(x,y)=2x+3y+1* est-elle linéaire ? L'application *u(x,y)=2x+3y* est-elle linéaire ?
2) L'application qui associe à un polynôme *P* de degré inférieur ou égal à *n* le polynôme dérivé *P'* est-elle linéaire ? Calculer son noyau et son image. L'application est-elle inversible ?
3) L'application $u(x,y)=2x^2+3y$ est-elle linéaire ?
4) Trouver une base de l'espace vectoriel des applications linéaires de R^3 dans *R*.
***5)* Calculer le noyau et l'image de l'application linéaire *u(x,y,z)=2x+3y+z.* Cette application linéaire est-elle injective, surjective ?**

Programme traité lors du cours du 26 mars 2013

Matrices (fin)

Matrice d'une application linéaire. Exemples de matrices d'applications linéaires. Représentation des observables d'un système quantique à un nombre fini d'états et matrices.

Fonctions élémentaires

Notion de fonction d'une variable. Graphe. Dérivée d'une fonction. Différentielle d'une fonction. Estimation de l'accroissement d'une fonction à l'ordre un. Dérivation d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une fonction composée. Exemples de calculs de dérivées.

Exercices traités

1) a) Calculer *A+2B* où $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. b) Peut-on calculer les matrices suivantes, et si oui les calculer : *AB, BA,* $B({}^tA)$, $({}^tA)B$ *?*
2) a) Montrer que les matrices $E_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, E_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, E_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, E_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ forment une base de l'espace des matrices à deux lignes et deux colonnes. b) Calculer les produits $E_{ij}E_{kl}$
3) Déterminer la matrice d'une rotation de centre l'origine et d'angle θ dans la base canonique de R^2 *(par deux méthodes).*
4) a) Déterminer la matrice d'une symétrie par rapport à une droite passant par l'origine et d'angle polaire θ dans la base canonique de R^2. b) Montrer matriciellement que le produit de deux symétries par rapport à des droites est une rotation.

5) Calculer la dérivée de la fonction $f(x)=sin\left(2e^{3x}+\frac{x\,ln(x^2)}{1+x^2}\right)$.

Programme traité lors du cours du 27 mars 2013

Fonction logarithme

Définition. Logarithme d'un produit, d'un quotient, d'une puissance. Concavité de la fonction logarithme. Limites en l'infini, en zéro. Comparaison de la croissance du logarithme et des puissances entières. Graphe de la fonction logarithme. Logarithme en base *a.* Graphe du logarithme en base *a.* Utilisation des logarithmes en calcul numérique.

Fonctions réciproques

Réciproque d'une fonction. Réciproque d'une fonction continue et monotone sur un intervalle. Le graphe de la fonction réciproque de f **est symétrique par rapport à la première bissectrice du graphe de *f.* Dérivée d'une fonction réciproque.**

Fonction exponentielle

Définition. Exponentielle d'une somme. Dérivée. Sens de variation. Graphe de la fonction exponentielle. Convexité. Calcul de *exp(x)* comme limite de $(1+x/n)^n$**. Résolution de l'équation *y'=ay.* Fonction** a^x**.**

Fonctions puissances

Définition. Propriétés. Croissance comparée des fonctions puissance et exponentielle. Graphe des fonctions puissances.

Fonctions hyperboliques

Sh(x), ch(x), th(x). Dérivées, sens de variation. Limites et comportement à l'infini. Croissance comparée des fonctions puissance et exponentielle.

Exercices traités

1) Résoudre *y'=ay.*
2) Déterminer la variation de l'évolution au cours du temps de la température d'une pièce après ouverture d'un four (loi de Newton).

Programme traité lors du cours du 2 avril 2013

Fonctions trigonométriques inverses. Fonctions Arcsinx, Arccosx, Arctanx (graphes, dérivées).
Fonctions hyperboliques. Retour sur la comparaison des fonctions puissances, logarithme, exponentielles en l'infini et en *0.* Exemples de résolution de formes indéterminées. Fonction tangente hyperbolique. Fonction Arcthx, relation avec $\frac{1}{2}ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$**.**

Formule des accroissements finis. Minimum et maximum relatif. Critère de la dérivée première. Théorème de Rolle. Théorème des accroissements finis. Utilisation à l'établissement d'inégalités fonctionnelles.

Exercices traités

1) Variations et courbe représentative de *y(x)=lnx/x.*
2) Limite de exp(-x)ln($x^{1/2}$)/$x^{3/2}$ lorsque $x \to +\infty$.
3) Évaluer Arctan(0,02) à un millième près.

Programme traité lors du cours du 9 avril 2013

Applications de la formule des accroissements finis. Exemples d'inégalités fonctionnelles. Valeur approchée d'une fonction, encadrement de l'erreur commise.
Règle de l'Hospital. Rappel des méthodes connues de résolution de formes indéterminées (équivalents, croissance comparée des fonctions logarithme, puissance, exponentielle). Théorème de Cauchy. Règle de l'Hospital. Extension de la règle de l'Hospital au cas des indéterminations de la forme infini/infini. Exemples d'applications.
Formule de Taylor-Lagrange. Énoncé. Cas particulier du développement à l'ordre 2. Condition suffisante de minimum local (resp. de maximum local). Application à des problèmes d'optimisation. Notions de développement limité au voisinage de 0. Formule de Taylor et développements en série des fonctions classiques.

Exercices traités

1) Montrer que l'on a : $x<\text{Arcsin}x<x(1-x^2)^{-1/2}$ si $0<x<1$.
2) Donner une valeur approchée de la racine carrée *de 1 000* 001 et estimer l'erreur commise en remplaçant la vraie valeur par cette valeur approchée.
3) Calculer la limite de $(e^x - \cos x - \sin x)/x^2$ quand x tend vers 0.
4) Calculer la limite de $(\ln x)/xe^x$ quand x tend vers plus l'infini.
5) Un voilier se trouve en mer, en un point *M* situé à 5 km d'une côte que l'on suppose rectiligne. La projection orthogonale de *M* sur la côte rectiligne se trouve à 6 km d'un village. Le navigateur désire se rendre au plus vite à ce village. Sachant qu'il navigue à la vitesse de 2km/h et qu'il marche à la vitesse de 4km/h, déterminer à quel endroit le voilier doit accoster pour ce rendre au village en un minimum de temps.

Prévu pour le prochain cours

FORMULE DE TAYLOR (FIN). Développements limités des fonctions usuelles.
CALCUL INTÉGRAL. Primitives d'une fonction. Intégrale simple. Calcul des aires et des volumes. Intégration par parties, par changement de variable. Intégrale simple et sommes de Riemann.