EXERCICES FACULTATIFS

Exercice 5 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée.

a) $f(x) = (x^2+1)\sqrt{x^3-1}$, b) $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{\sqrt{x}+1}$,

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$, d) $f(x) = x - \ln x$,

e) $f(x) = \sqrt{\cos^2(x)+1}$, f) $f(x) = \dfrac{1}{3}\tan^3(x) - \tan(x) + x$,

g) $f(x) = x \ln x$, h) $f(x) = \ln\sqrt{x^2+1}$,

i) $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\sqrt{x^2+1}}$, j) $f(x) = \ln\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$,

k) $f(x) = \sqrt{1-x^2}\arcsin x$, l) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2} + \arctan x$,

m) $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{x}$, n) $f(x) = \arctan\dfrac{1}{x}$,

o) $f(x) = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x}}$.

Exercice 6 Etudier les fonctions suivantes (tableau de variations et graphe) :

a) $f(x) = x^2(x-2)^2$, b) $f(x) = x^2(x-1)^3$,

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}$, d) $f(x) = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$,

e) $f(x) = \mathrm{th}x - \dfrac{1}{\mathrm{ch}x}$.

Exercice 7 Montrer que la fonction $f(x) = |x^2-3|$ est continue sur $\mathbb{R}$. Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$? Etudier les variations et tracer le graphe de cette fonction.

Exercice 8 En utilisant la formule de Taylor, montrer que, pour tout $x \geq 0$, on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Pour quelles valeurs de $x \geq 0$ peut-on dire que $x - \dfrac{x^2}{2}$ est une valeur approchée de $\ln(1+x)$ à 10^{-3} près ?

Exercice 9 Trouver le polynôme de Taylor à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{1}{e^x}$ autour de $x_0 = 0$ et de $x_0 = 1$;
b) $f(x) = \ln(1+\sin x)$ autour de $x_0 = 0$;
c) $f(x) = \arcsin(2x)$ autour de $x_0 = 0$ et de $x_0 = 1$;
d) $f(x) = \mathrm{sh}(x+x^2)$ autour de $x_0 = 0$;
e) $f(x) = \mathrm{ch}(x+x^2)$ autour de $x_0 = 0$;
f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ autour de $x_0 = 0$.