

## Fiche d'exercices n° 3

### Applications linéaires et matrices

#### 1 Exercices obligatoires

**Exercice 1.** Parmi les applications suivantes indiquer, en justifiant, celles qui sont linéaires :

- (a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x + 3y, 3x - 5y)$ ; (b)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \sin(x)$ ;  
(c)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x + 2y, y - z^2)$ ; (d)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + y, 2x + 3y)$ ;  
(e)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [x]$  où  $[x]$  désigne la partie entière de  $x$ .

**Exercice 2.** On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Quels sont les produits matriciels possibles? En calculer au moins cinq.

**Exercice 3.**

(1) On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$  où  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

(a) Calculer  $A^2$  et  $A^3$ .

(b) Calculer  $A^n$  pour tout entier  $n$  strictement positif.

(2) Calculer le carré de la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

(3) On considère les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculer  $AB, AC$ . Que remarque-t-on?

**Exercice 4.** Calculer le déterminant et, si elle existe, la matrice inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 5.** Déterminer les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques des espaces vectoriels concernés :

(a)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x + 3y, 3x - 5y)$ ; (b)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x - 3y, x + y)$ ;

(c)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (2x - y, x + y, x - y)$ ; (d)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x + y, y - z)$ .

**Exercice 6.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  et  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  les deux applications linéaires définies, en coordonnées cartésiennes, par

$$f(x, y) = (2x + y, -y, x - 2y), g(x, y, z) = (x - z, 2y).$$

(1) Calculer les applications composées  $g \circ f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  et  $f \circ g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

(2) Trouver les matrices  $A$  et  $A'$  qui représentent  $f$  et  $g$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ .

(3) Vérifier que les produits  $A'A$  et  $AA'$  représentent les composés  $g \circ f$  et  $f \circ g$ .

**Exercice 7.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  définie par

$$f(x, y) = (x - y, x + y).$$

- (1) Déterminer la matrice  $A$  dans la base canonique  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  de  $\mathbb{R}^2$ .
- (2) Calculer  $f^{-1}$  et en déduire  $A^{-1}$ .
- (3) Est-ce que l'application  $f$  est un isomorphisme?
- (4) Si on considère le produit scalaire euclidien sur  $\mathbb{R}^2$ , est-ce que l'application  $f$  est une isométrie?

## 2 Exercices supplémentaires

**Exercice 8.** Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application définie par

$$f(x, y, z) = (2x - z, -x + 3y + z, z).$$

- (1) Calculer  $f(\vec{0})$ ,  $f(1, 1, 1)$  et  $f(1, 0, -1)$ .
- (2) Montrer que  $f$  est une application linéaire.
- (3) Calculer les images de  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$  par  $f$  où  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . En déduire la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}$ .

**Exercice 9.** Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  une matrice  $2 \times 2$  à coefficients dans  $\mathbb{R}$ . Montrer que si  $A$  est inversible alors son inverse est donné par la formule

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

**Exercice 10.** On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (1) Calculer  $AB$  et  $BA$  et les comparer.
- (2) Calculer  $\det(A)$  et  $\det(B)$ .
- (3) Vérifier par le calcul que  $\det(AB) = \det(BA)$ . Comparer avec  $\det(A) \times \det(B)$ .

**Exercice 11.** On considère la matrice

$$M = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer  $M^2$  ainsi que la matrice  $N = 1 - M$ . Vérifier que  $N^2 = N$ .

**Exercice 12.** Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (-x + y + z, -6x + 4y + 2z, 3x - y + z).$$

Déterminer la matrice  $A$  de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et vérifier que  $A^2 = 2A$ .