

**TECHNIQUES MATHÉMATIQUES DE BASE**  
Contrôle continu d'amphithéâtre du 30 avril 2013  
Durée de l'épreuve : 1h 30

**Avertissement.** Les calculettes sont interdites. Le contrôle comporte trois exercices indépendants, qui peuvent être traités dans n'importe quel ordre. Un barème sur 21,5 points (plus 3 points de bonus) figure à titre indicatif. On attachera du prix à la rédaction.

**EXERCICE I (3 points)**

Calculer la limite lorsque  $x \rightarrow 0$ ,  $x \neq 0$ , de  $f(x) = \frac{e^{\sqrt{1+\sin x}} - e}{\tan x}$ .

**EXERCICE II (13,5 points)**

Soit  $f$  la fonction d'une variable réelle définie par  $f(x) = \frac{x}{2} \ln((x-1)^2)$

**Question 1** (0,5 point). Préciser le domaine de définition  $D$  de  $f$ .

**Question 2** (2 points). Montrer que, pour  $x \in D$ , la dérivée de  $f$  est donnée par :

$$f'(x) = \ln(|x-1|) + \frac{1}{x-1} + 1.$$

**Question 3** (2 points). Calculer la dérivée seconde de  $f$  sur  $D$ . En déduire le tableau des variations de la dérivée  $f'$ .

**Question 4** (3 points). Calculer les limites de  $f'$  en  $-\infty$ , et au point  $x=1$  à gauche. Montrer que  $f'$  s'annule en un seul point de  $D$  que l'on déterminera.

**Question 5** (3 points). Étudier le signe de  $f'$  et dresser le tableau de variation de  $f$ . Déterminer les points  $x \in D$  tels que  $f(x) = 0$  et les tangentes au graphe de  $f$  en ces points.

**Question 6** (3 points). Étudier les limites de  $f$  aux bornes de  $D$  et représenter le graphe de  $f$  dans un repère orthonormé (on précisera les éventuelles asymptotes et branches paraboliques).

**Question subsidiaire facultative** (3 points de bonus). Calculer l'aire de la portion de plan comprise entre l'axe des  $x$ , le graphe de  $f$  et les droites d'équations  $x=2$  et  $x=3$ .

**EXERCICE III (5 points)**

**Question 1** (2 points). Montrer que l'on a, pour tout  $x \geq 0$  :

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}. \text{ (Indication : on pourra utiliser la formule de Taylor)}$$

**Question 2** (1,5 point). Calculer la limite lorsque  $x \rightarrow 0$ ,  $x > 0$ , de  $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x - \frac{x^2}{2}}$ .

**Question 3** (1,5 point). En utilisant la question 1, déterminer une valeur approchée de  $\ln(1,1)$  à moins de  $10^{-3}$  près.

\*\*\*