CHAPITRE II

GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE PLANE

§1. — VECTEURS DU PLAN.

1.1. Exercices traités.

EXERCICE 1. — *Soient* A,B,A',B' *quatre points du plan. Établir que :*

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'} .$$

Solution. — Il suffit de montrer l'implication :

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'} .$$

Or, si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$, on a en vertu de la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA'}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{BA'}=\overrightarrow{BB'} ,$$

d'où le résultat. ■

EXERCICE 2. — *On considère un triangle* ABC *du plan.*

a) Montrer l'existence <u>*d'un unique point*</u> G*, appelé centre de gravité du triangle* ABC*, tel que l'on ait* $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

b) Soit I *le milieu de* BC. *Montrer que* G *appartient au segment* AI *et que l'on a* $AG=\frac{2}{3}AI$.

c) Déduire de ce qui précède que les trois médianes du triangle ABC *sont concourantes.*

Solution. — a) Fixons une origine O. Si le point G existe, il doit vérifier :

$$\begin{aligned}\vec{0}&=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OC})\\&=-3\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC},\end{aligned}$$

d'où :

$$\overrightarrow{OG}=\tfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

Ceci prouve l'unicité de G. Pour montrer son existence, considérons le point G défini par :

$$\overrightarrow{OG}=\tfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}).$$

On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}&=(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OC})\\&=-3\overrightarrow{OG}+(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=-3\overrightarrow{OG}+3\overrightarrow{OG}=\vec{O},\end{aligned}$$

et G vérifie les conditions imposées.

b) On a :

$$\overrightarrow{GA}=-(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})=-(\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IC})=-2\overrightarrow{GI}$$

car I est le milieu de AB et donc $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GI}$ sont colinéaires, et par conséquent les points A,I,G sont alignés. De plus, G est situé entre A et I et la relation $GA=2GI$ implique que $AG=\frac{2}{3}AI$.

c) La question b) montre que G est situé sur les trois médianes du triangle ABC. Ces dernières sont donc concourantes en G.■

EXERCICE 3. — *Montrer que trois vecteurs du plan sont toujours linéairement dépendants.*

Solution. — Soient $\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2},\overrightarrow{V_3}$ trois vecteurs du plan. Supposons par l'absurde que ces trois vecteurs soient linéairement indépendants. Alors, les vecteurs $\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2}$ seraient *a fortiori* linéairement indépendants et $\overrightarrow{V_3}$ serait non nul. Dans ce cas, $(\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2})$ constituerait une base du plan, et le vecteur non nul $\overrightarrow{V_3}$ se décomposerait sous la forme $\overrightarrow{V_3}=\lambda_1\overrightarrow{V_1}+\lambda_2\overrightarrow{V_2}$ avec des λ_i réels. On aurait alors :

$$\lambda_1\overrightarrow{V_1}+\lambda_2\overrightarrow{V_2}-\overrightarrow{V_3}=\vec{0}$$

et donc, par indépendance linéaire, $\lambda_1=\lambda_2=-1=0$, ce qui est absurde. Donc $\overrightarrow{V_1},\overrightarrow{V_2},\overrightarrow{V_3}$ sont linéairement dépendants. ■

1.2. Exercices proposés.

EXERCICE I. — *Un avion navigue avec une vitesse au sol de 300km/h dans une direction de 60° (angle par rapport au Nord, calculé dans le sens des aiguilles d'une montre). Mais le vent souffle de l'Ouest à une vitesse au sol de 65 km/h. Déterminer la vitesse réelle au sol de l'avion, ainsi que sa direction réelle (en degrés, par rapport au Nord).*

Réponse. — La vitesse réelle au sol de l'avion est de 357 km/h, dans une direction d'environ 65° par rapport au Nord.■

EXERCICE II. — *Soient* ABC *un triangle du plan,* G *son centre de gravité,* I *le milieu de* AC *et* J *le symétrique de* G *par rapport à* I *sur la droite* BI.

a) Montrer que l'on a, pour tout point M *du plan :*

$$\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) \text{ et } \overrightarrow{MJ} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right).$$

b) En déduire l'ensemble des points M *du plan tels que :*

$$\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|.$$

Réponse. — L'ensemble cherché est la médiatrice du segment GJ.■

EXERCICE III. — *Quelles conditions doivent vérifier deux vecteurs* $\vec{U}$ *et* $\vec{V}$ *pour que l'on ait :*

$$\left\|\vec{U} + \vec{V}\right\| = \left\|\vec{U}\right\| + \left\|\vec{V}\right\| ?$$

Les vecteurs $\vec{U}$ *et* $\vec{V}$ *forment-ils alors une base ?*

Réponse. — La condition sur les normes est vérifiée si et seulement si l'un des vecteurs $\vec{U}$ ou $\vec{V}$ est nul, ou bien si aucun n'est nul mais il existe $\lambda > 0$ tel que $\vec{V} = \lambda\vec{U}$. Les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont proportionnels dans tous les cas ; ils ne forment donc pas une base. ■

§2. — COORDONNÉES CARTÉSIENNES.

2.1. Exercices traités.

EXERCICE 4. — *Soient* a,b *deux nombres strictement positifs. On considère les points* A *et* B *du plan de coordonnées* $(\ln a, \sin a)$ *et* $(\ln b, \sin b)$ *dans un repère orthonormé. Déterminer les coordonnées cartésiennes du milieu* I *du segment* AB.

Solution. — Comme $\overrightarrow{OI} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$, les coordonnées (x,y) du point I sont données par :

$$x = \tfrac{1}{2}(\ln a + \ln b) = \ln\sqrt{ab},$$
$$y = \tfrac{1}{2}(\sin a + \sin b) = \sin(\tfrac{a+b}{2})\cos(\tfrac{a-b}{2})$$

et donc $x = \ln\sqrt{ab}$, $y = \sin(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})$.■

EXERCICE 5. — *Déterminer le réel* λ *pour que les vecteurs* $\vec{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\lambda \end{pmatrix}$ *et* $\vec{V} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda+1 \end{pmatrix}$ *soient linéairement indépendants.*

Solution. — Le produit mixte de ces deux vecteurs est donné par :

$$\left[\vec{U},\vec{V}\right] = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ -\lambda & 2\lambda+1 \end{vmatrix} = 2\lambda + 1 + \lambda^2 = (1+\lambda)^2.$$

Il est non nul si et seulement si $\lambda \neq -1$, de sorte que les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ sont linéairement indépendants si et seulement si $\lambda \neq -1$. ■

2.2. Exercices proposés.

EXERCICE IV. — *On considère les points* A *et* B *de coordonnées cartésiennes respectives* $(2,-1)$ *et* $(1,3)$*.Déterminer les coordonnées cartésiennes de la projection de* B *sur la droite* OA.

Réponse. — Cette projection a pour coordonnées cartésiennes $x = -\frac{2}{5}$ et $y = \frac{1}{5}$. ■

EXERCICE V. — *On considère les vecteurs* $\overrightarrow{U_\theta}$ *et* $\overrightarrow{V_\theta}$ *de coordonnées respectives* $(2\cos\theta, \theta)$ *et* $(1, \theta\cos\theta)$. *Déterminer le réel* θ *pour que les vecteurs*

$\overrightarrow{U_\theta}$ et $\overrightarrow{V_\theta}$ forment une base. Préciser alors le produit mixte $\left[\overrightarrow{U_\theta},\overrightarrow{V_\theta}\right]$ et l'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs ?

Réponse. — Les vecteurs $\overrightarrow{U_\theta}$ et $\overrightarrow{V_\theta}$ forment une base si et seulement si θ est non nul et non congru à $\frac{\pi}{4}$ modulo $\frac{\pi}{2}$. Dans ce cas, on a $\left[\overrightarrow{U_\theta},\overrightarrow{V_\theta}\right]=\theta\cos 2\theta$, et l'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs est égale à $\left|\theta\cos 2\theta\right|$. ■

§3. — PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS.

3.1. Exercices traités.

EXERCICE 6. — *Soient $\vec{U},\vec{V}$ deux vecteurs du plan. Montrer que l'on a :*

$$\left|\left[\vec{U},\vec{V}\right]\right|^2+\left|\vec{U}\cdot\vec{V}\right|^2=\left\|\vec{U}\right\|^2+\left\|\vec{V}\right\|^2.$$

Solution. — Notons (x,y) et (z,t) les coordonnées de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans un repère orthonormé. On a :

$$\left|\left[\vec{U},\vec{V}\right]\right|^2=\left(xt-yz\right)^2=x^2t^2+y^2z^2-2xyzt,$$
$$\left|\vec{U}\cdot\vec{V}\right|^2=\left(xz+yt\right)^2=x^2z^2+y^2t^2+2xyzt,$$

d'où :

$$\left|\left[\vec{U},\vec{V}\right]\right|^2+\left|\vec{U}\cdot\vec{V}\right|^2=x^2t^2+y^2z^2+x^2z^2+y^2t^2.$$

Par ailleurs, on a :

$$\left\|\vec{U}\right\|^2\left\|\vec{V}\right\|^2=\left(x^2+y^2\right)\left(z^2+t^2\right)=x^2z^2+x^2t^2+y^2z^2+y^2t^2,$$

d'où le résultat. ■

EXERCICE 7. — *Montrer que, dans un parallélogramme, la somme des carrés des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales.*

Solution. — Considérons un parallélogramme $ABCD$ du plan, de diagonales AC et BD. On a :

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD} \text{ et } \overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD},$$

d'où :

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD},$$

$$\left\|\overrightarrow{DB}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}.$$

En sommant ces deux relations membre à membre, on obtient :

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{DB}\right\|^2 = 2\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AD}\right\|^2\right).$$

Comme $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{DC}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{AD}\right\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|$, on en déduit que :

$$AC^2 + DB^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2,$$

et le résultat est démontré. ■

EXERCICE 8. — *Déterminer l'ensemble des points* M *du plan desquels on voit un segment* AB *sous un angle droit.*

Solution. — On exploite l'identité de polarisation :

$$(1)\ \ \vec{U}\cdot\vec{V} = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{U}+\vec{V}\right\|^2 - \left\|\vec{U}-\vec{V}\right\|^2\right),$$

en posant $\vec{U} = \overrightarrow{MA}$ et $\vec{V} = \overrightarrow{MB}$. Si I désigne le milieu de AB, on a :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA},$$

de sorte que l'identité de polarisation (1) s'écrit :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\left(4MI^2 - AB^2\right).$$

Le point M regarde le segment AB sous un angle droit si et seulement si $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ i.e. (d'après ce qui précède) si et seulement si $4MI^2 = AB^2$, ce qui équivaut encore à :

$$MI = \frac{AB}{2}.$$

L'ensemble des points M desquels on voit le segment AB sous un angle droit est donc le cercle de centre le milieu I de AB, et de diamètre AB. Les cas où M est égal à A ou B sont particuliers, car l'angle que fait les demi-droites MA et MB n'est plus défini.■

3.2. Exercices proposés.

EXERCICE VI. — *On considère quatre points distincts* A,B,C,M *du plan. Montrer que, si l'on a* $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$, *la droite* CM *est une hauteur du triangle* ABC.

Indication. — Considérer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CM}$. ■

EXERCICE VII. — *On considère un triangle* ABC *du plan. On note* α *l'angle en* A *et* a,b,c *les côtés* BC,CA,AB. *Montrer que l'on a :*

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha .$$

Indication. — Écrire que $a^2=\left\|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right\|^2$. ■

EXERCICE VIII. — *On considère deux points* A,B *du plan et un réel* $k>0$.

a) Soit I *le milieu de* AB. *Montrer que l'on a, pour tout point* M *du plan :*

$$\left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{MB}\right\|^2=2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}.$$

b) En déduire le lieu des points M *du plan tels que* $\left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{MB}\right\|^2=k$.

Réponse. — Le lieu des points M est une droite orthogonale au segment AB dont l'intersection H avec AB vérifie $\overline{IH}\,\overline{AB}=\frac{k}{2}$. ■

§4. — DROITES DU PLAN.

4.1. Exercices traités.

EXERCICE 9. — *Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère la droite* (D) *d'équation* $x-y-1=0$ *et le point* A *de coordonnées cartésiennes* $(1,2)$.

a) Déterminer les coordonnées cartésiennes du point H *projection orthogonale de l'origine sur la droite* (D).

b) Soit P *la projection orthogonale du point* A *sur la droite* (D). *Déterminer les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{HP}$.

c) Déduire de ce qui précède les coordonnées de P.

Solution. — a) Le vecteur $\overrightarrow{OH}$ est parallèle au vecteur $\vec{U}$ de coordonnées $(1,-1)$; ses coordonnées sont donc de la forme $(x,-x)$. En écrivant que H appartient à la droite (D), on obtient $2x-1=0$, d'où $x=\frac{1}{2}$. Les coordonnées du point H sont donc $(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$.

b) Un vecteur directeur de la droite (D) est le vecteur $\vec{V}$ de coordonnées $(1,1)$. Comme le vecteur $\overrightarrow{HP}$ est le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{OA}$ sur le vecteur $\vec{V}$, on a :

$$\overrightarrow{HP}=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\vec{V}}{\|\vec{V}\|^2}\vec{V},$$

d'où l'on déduit que $\overrightarrow{HP}=\frac{3}{2}\vec{V}$. Il s'ensuit que les coordonnées de $\overrightarrow{HP}$ sont $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$.

c) De la relation $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HP}$ et des questions a) et b), on déduit que les coordonnées du point P sont $(2,1)$. ■

EXERCICE 10. — *On considère trois points A,B,C du plan, de coordonnées cartésiennes $(1,1),(0,3)$ et $(0,1)$ dans un repère orthonormé.*

a) Écrire l'équation de la droite (D) passant par A et B.

b) Déterminer l'équation de la perpendiculaire (Δ) à la droite (D) passant par le point C.

c) Déterminer le point d'intersection des droites (D) et (Δ).

d) Calculer de deux manières différentes la distance du point C à la droite (D).

Solution. — a) Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-1,2)$. Un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\vec{V}$ de coordonnées $(2,1)$, de sorte que l'équation de la droite (D) est de la forme $2x+y=c$. Cette droite passe par B et, en faisant $x=0$ et $y=3$ dans son équation, on obtient $c=3$. L'équation de (D) est donc : $2x+y-3=0$.

b) La perpendiculaire à (D) passant par C a pour vecteur orthogonal le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $(-1,2)$. Son équation est donc de la forme $-x+2y=d$. En écrivant que cette droite passe par C, on obtient $d=2$. La perpendiculaire à (D) passant par C a donc pour équation $x-2y+2=0$.

c) Les coordonnées (x,y) du point I intersection des droites (D) et (Δ) vérifient le système d'équations linéaires :

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ x-2y=-2 \end{cases}$$

En multipliant la première équation par 2 et en lui ajoutant la seconde, on obtient $5x=4$, d'où $x=\frac{4}{5}$. En reportant cette valeur dans la première équation, on obtient $y=\frac{7}{5}$. Les coordonnées du point d'intersection I sont donc $(\frac{4}{5},\frac{7}{5})$.

d) Puisque I est la projection orthogonale de C sur (D), la distance de C à la droite (D) est égale à

$$d(C,I)=\sqrt{\frac{16}{25}+\frac{4}{25}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

On peut retrouver ce résultat en utilisant l'expression de la distance $\delta_{(D)}(M)$ d'un point M de coordonnées (α,β) à une droite (D) d'équation $ax+by+c=0$ au moyen de la formule :

$$\delta_{(D)}(M)=\frac{|a\alpha+b\beta+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

On obtient ici :

$$\delta_{(D)}(C)=\frac{|1-3|}{\sqrt{4+1}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}. \blacksquare$$

4.2. Exercices proposés.

EXERCICE IX. — *Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère la droite (D) d'équation $x+y-2=0$ et le point A de coordonnées cartésiennes $(0,-1)$.*

a) Déterminer les coordonnées cartésiennes du point H projection orthogonale de l'origine sur la droite (D).

b) Soit P la projection orthogonale du point A sur la droite (D). Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{HP}$.

c) Déduire de ce qui précède les coordonnées de P *.*

Réponses. — a) Le point H a pour coordonnées $(1,-1)$. b) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{HP}$ sont $(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$. c) Les coordonnées du point P sont $(\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$. ■

EXERCICE X. — *Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère le point* A *de coordonnées* $(1,1)$ *et le vecteur* $\vec{V}$ *de coordonnées* $(-2,1)$.

a) Écrire l'équation de la droite (D) *orthogonale à* $\vec{V}$ *et passant par* A.

b) Déterminer l'équation de la perpendiculaire (Δ) *à la droite* (D) *passant par le point* B *de coordonnées* $(0,1)$.

c) Déterminer le point d'intersection des droites (D) *et* (Δ).

d) Calculer la distance du point B *à la droite* (D).

Réponses. — a) La droite (D) a pour équation $-2x+y+1=0$. b) La droite (Δ) a pour équation $x+2y-2=0$. c) Le point d'intersection des droites (D) et (Δ) a pour coordonnées $(\frac{4}{5},\frac{3}{5})$. d) La distance du point B à la droite (D) est égale à $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. ■

—