EXERCICES TRAITÉS EN COURS (7 MAI 2013)

EX 1. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\tan\left(\frac{1}{n}\right)+\tan\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+\tan\left(\frac{n}{n}\right)\right]$.

Solution. On sait que $\frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int^1 f(x)dx$ si f est continue sur $[0,1]$. Ici, pour $f(x)=\tan(x)$, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[\tan\left(\frac{1}{n}\right)+\tan\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+\tan\left(\frac{n}{n}\right)\right] = \int_0^1 \tan x\,dx = -\int_0^1 \frac{d(\cos x)}{\cos x}$$

$$= -\Big[\ln|\cos x|\Big]_{x=0}^{x=1} = \ln\left(\frac{1}{\cos 1}\right). \blacksquare$$

EX. 2 Calculer $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$.

Solution. On pose $u=\sin x$, d'où $du=\cos x\,dx$. Alors :

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx = \int \frac{1-u^2}{u^4}du = \int u^{-4}du - \int u^{-2}du = -\frac{1}{3}u^{-3}+u^{-1}+C^{ste}$$

$$= -\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{1}{\sin x}+C^{ste}. \blacksquare$$

EX. 3. Calculer $\int \frac{x^3-2}{x-1}dx$.

Solution. Comme $d^{\circ}(x^3-2) \geq d^{\circ}(x-1)$, on effectue la division euclidienne de x^3-2 par $x-1$:

$$\begin{array}{rl|l}
x^3 & \quad -2 & x-1 \\
x^3-x^2 & & \overline{x^2+x+1} \\ \hline
x^2 & \quad -2 & \\
x^2-x & & \\ \hline
x-2 & & \\
x-1 & & \\ \hline
-1 & &
\end{array}$$

Donc $x^3-2=(x-1)(x^2+x+1)-1$ et

$\frac{x^3-2}{x-1} = x^2+x+1-\frac{1}{x-1}$. On en déduit :

$$\int \frac{x^3-2}{x-1}dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x-\ln|x-1|+C^{ste}$$

$\blacksquare$

EX. 4 Calculer $\int \frac{3x^2-6x+2}{(x-1)^2(x-2)}dx$.

T.S.v.p.

Solution. Posons $R(x) = \dfrac{3x^2-6x+2}{(x-1)^2(x-2)}$. On a (décomposition d'une fraction rationnelle à pôles réels) :

$$R(x) = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

On détermine alors A et B, C en réduisant le second membre au même dénominateur et en identifiant le polynôme du numérateur à $3x^2-6x+2$. On peut aller plus rapidement en remarquant que :

$$A = R(x)(x-2)\Big|_{x=2} = \frac{3x^2-6x+2}{(x-1)^2}\Big|_{x=2} = 2\ ;$$

$$C = R(x)(x-1)^2\Big|_{x=1} = \frac{3x^2-6x+2}{x-2}\Big|_{x=1} = 1 \text{ et}$$

$$A+B = \lim_{x\to+\infty} R(x)(x-1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-6x+2}{(x-1)(x-2)} = 3.$$

On en tire $B = 3 - A = 1$. Mais alors :

$$\int R(x)dx = \int \frac{2\,dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} = 2\ln|x-2| + \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C^{\underline{ste}}. \blacksquare$$

EX.5. Calculer $\displaystyle\int \frac{3x^2-x}{(x-1)(1+x^2)}\,dx$.

Solution. La décomposition de $R(x) = \dfrac{3x^2-x}{(x-1)(1+x^2)}$ en éléments simples est de la forme :

$$\frac{3x^2-x}{(x-1)(1+x^2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{1+x^2} = \frac{A(1+x^2)+(x-1)(Bx+C)}{(x-1)(1+x^2)}$$

$$= \frac{(A+B)x^2+(C-B)x+A-C}{(x-1)(1+x^2)}.$$

Par identification, il vient :

$$\begin{cases} A+B=3 \\ C-B=-1 \\ A-C=0 \end{cases} \iff \begin{cases} A=C \\ A+B=3 \\ A-B=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=1 \\ B=2 \\ C=1 \end{cases} \text{ et}$$

$$\frac{3x^2-x}{(x-1)(1+x^2)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2x+1}{1+x^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2}.$$

Mais alors :

$$\int \frac{3x^2-x}{(x-1)(1+x^2)}\,dx = \ln|x-1| + \int \frac{2x\,dx}{1+x^2} + \text{Arctan}\,x$$
$$= \ln|x-1| + \ln(1+x^2) + \text{Arctan}\,x + C^{\text{ste}}. \quad \blacksquare$$

<u>Ex. 6</u>. Calculer $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+2x^2)^2}$.

<u>Solution</u>. Le changement de variable $u=\sqrt{2}\,x$ nous donne :

$$\int \frac{dx}{(1+2x^2)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{(1+u^2)^2}.$$

Pour calculer $I_2 = \displaystyle\int \frac{du}{(1+u^2)^2}$, on intègre $I_1 = \displaystyle\int \frac{du}{1+u^2}$ par parties en posant

$$v = \frac{1}{1+u^2}, \quad du = du$$

$$dv = \frac{-2u\,du}{(1+u^2)^2}, \quad u = u. \qquad \text{Il vient :}$$

$$I_1 = \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{u}{1+u^2} + 2\int \frac{u^2\,du}{(1+u^2)^2} = \frac{u}{1+u^2} + 2\int \frac{du}{1+u^2} - 2I_2$$
$$= \frac{u}{1+u^2} + 2I_1 - 2I_2. \qquad \text{On en tire :}$$

$$2I_2 = \frac{u}{1+u^2} + I_1 = \frac{u}{1+u^2} + \text{Arctan}\,u + C^{\text{ste}}, \quad \text{d'où}$$

$$I_2 = \int \frac{du}{(1+u^2)^2} = \frac{1}{2}\frac{u}{1+u^2} + \frac{1}{2}\text{Arctan}\,u + C^{\text{ste}}.$$

Mais alors :

$$\int \frac{dx}{(1+2x^2)^2} = \frac{1}{2\cancel{\sqrt{2}}}\frac{\cancel{\sqrt{2}}\,x}{1+2x^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\text{Arctan}(\sqrt{2}\,x) + C^{\text{ste}}. \quad \blacksquare$$

T. Fack.