T.M.B – CONTRÔLE CONTINU D'AMPHITHÉÂTRE DU 30 AVRIL 2013. CORRIGÉ SUCCINT

EXERCICE 1. On a : $\dfrac{e^{\sqrt{1+\sin x}}-e}{\tan x} = \cos x\, \dfrac{e^{\sqrt{1+\sin x}}-e^{\sqrt{1+0}}}{\sin x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1\cdot f'(0)$, où $f(u)=e^{\sqrt{1+u}}$. Or $f'(u)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+u}}e^{\sqrt{1+u}}$ et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sqrt{1+\sin x}}-e}{\tan x} = \dfrac{e}{2}}$. ∎

EXERCICE 2.

QUESTION 1. Le domaine de définition de $f(x)=\dfrac{x}{2}\ln((x-1)^2)$ est $D=\mathbb{R}-\{1\}$. ∎

QUESTION 2. Pour $x\in D$, on a $f(x)=x\ln|x-1|$, d'où

$$f'(x)=\ln|x-1|+\frac{x}{x-1}=\ln|x-1|+1+\frac{1}{x-1}. \ ∎$$

QUESTION 3. On a : $f''(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{(x-1)^2}=\dfrac{x-2}{(x-1)^2}$. Pour $x\geqq 2$, $f''(x)$ est $\geqq 0$; pour $x\leqq 2$, $f''(x)\leqq 0$, d'où le tableau de variations suivant pour f' :

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$	‖	$\searrow$	2	$\nearrow$	

∎

QUESTION 4 et 5 Quand $x\to\pm\infty$, $|x-1|\to+\infty$ et $1+\dfrac{1}{x-1}\to 1$, de sorte que $f'(x)\to+\infty$. Quand $x\to 1$, on a :

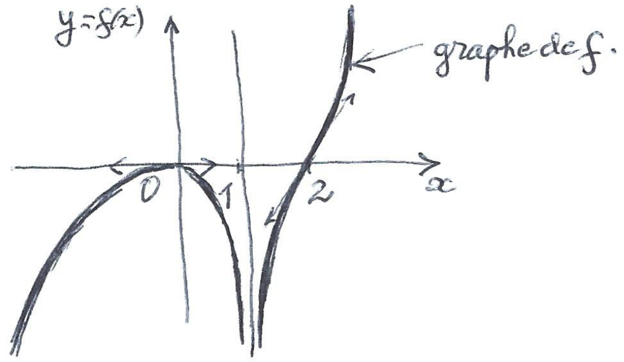
$$f'(x)=\frac{1}{x-1}\left[1+(x-1)+(x-1)\ln(x-1)\right]\sim\frac{1}{x-1}$$

et donc $f'(x)\to-\infty$ quand $x\to 1^-$ et $f'(x)\to+\infty$ quand $x\to 1^+$. Il résulte de la question 3 que $f'(x)\geqq 2$ pour $1<x<+\infty$ et que $f'(x)$ s'annule en un seul point $x\in]-\infty,1[$. Comme $f'(0)=0$, $x=0$ est l'unique point d'annulation de f'. On peut donc dresser le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$ $-\infty$	‖	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On remarque que $f(0)=0$ et $f(2)=0$. D'après le tableau de variations ci-dessus, ce sont les seuls zéros de f. Comme $f'(2)=2$, les tangentes au graphe de f ont pour équation :
a) au point $x=0$: $y=0$; b) au point $x=2$: $y=2(x-2)$. ∎

QUESTION 6. Quand $x\to-\infty$, $f(x)\to-\infty$; quand $x\to+\infty$, $f(x)\to+\infty$. Quand $x\to 1$, $f(x)\to-\infty$. La droite d'équation $x=1$ est donc asymptote. Comme $\dfrac{f(x)}{x}=\ln|x-1|\to+\infty$ quand $x\to\pm\infty$, le graphe de f admet en $\pm\infty$ des branches paraboliques de direction Oy. Enfin, puisque $f''(x)>0$ pour $x>2$, le graphe de f est celui d'une fonction convexe sur $]2,+\infty[$. Sur $]-\infty,1[$ et $]1,2[$, la restriction de f est concave car sa dérivée seconde est <0. On a donc la courbe représentative suivante :



■

<u>QUESTION SUBSIDIAIRE</u>. L'aire recherchée est égale à :

$$a = \int_2^3 x\ln(x-1)\,dx = \int_1^2 (u+1)\ln(u)\,du = \left[u\left(\frac{u}{2}+1\right)\ln u\right]_{u=1}^{u=2} - \int_1^2 \left(1+\frac{u}{2}\right)du$$

(intégrer par parties en posant $v=\ln u$ et $dw=(u+1)du$), d'où

$$a = 4\ln 2 - \left[u+\frac{u^2}{4}\right]_{u=1}^{u=2} = \boxed{4\ln 2 - \frac{7}{4}}$$ ■

<u>EXERCICE 3</u>

<u>QUESTION 1</u>. D'après la formule de Taylor, on a, pour $x \geqq 0$, sachant que $f(x)=\ln x$ a pour dérivée première $f'(x)=\frac{1}{x}$, pour dérivée seconde $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$ et pour dérivée 3^e $f'''(x)=\frac{2}{x^3}$:

$$\ln(1+x) = \ln(1) + x + \frac{x^2}{2}(-1) + \frac{x^3}{3!}\times\frac{2}{(1+\theta x)^3}$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\times\frac{1}{(1+\theta x)^3}, \text{ où } 0<\theta<1$$

Comme $0 \leqq \frac{1}{(1+\theta x)^3} \leqq 1$, on a :

$$0 \leqq \ln(1+x) - \left(x-\frac{x^2}{2}\right) \leqq \frac{x^3}{3} \text{ et donc}$$

$$\boxed{x-\frac{x^2}{2} \leqq \ln(1+x) \leqq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}}$$ ■

<u>QUESTION 2</u>. $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x-\frac{x^2}{2}}$ vérifie, pour $x \geqq 0$ voisin de 0, compte tenu de la question 3 :

$$1 \leqq f(x) \leqq 1 + \frac{x^3}{3(x-\frac{x^2}{2})} = 1 + x^2 \times \frac{1}{3(1-\frac{x}{2})} \xrightarrow[x\to 0]{} 1.$$

Il s'ensuit que $\boxed{\dfrac{\ln(1+x)}{x-\frac{x^2}{2}} \xrightarrow[x\to 0]{} 1}$. Ce résultat aurait aussi bien pu être établi à l'aide de la règle du marquis de l'Hospital. ■

<u>QUESTION 3</u>. Pour $x=0{,}1$, on a en vertu de la question 1 :

$$\left|\ln(1{,}1) - \left(0{,}1 - \frac{(0{,}1)^2}{2}\right)\right| \leqq \frac{(0{,}1)^3}{3} < 10^{-3}.$$

Comme $0{,}1 - \frac{(0{,}1)^2}{2} = 0{,}1 - 0{,}005 = 0{,}095$, on a :

$\boxed{\ln(1{,}1) \approx 0{,}095}$ la valeur étant approchée à moins de 10^{-3} près. ■