FORMULAIRE
DE
TECHNIQUES MATHÉMATIQUES DE BASE

Chapitres VII et VIII

PAR

T. FACK

Professeur à l'Université Claude Bernard

SOMMAIRE

LICENCE SCIENCES TECHNOLOGIES SANTÉ DE LYON

VII.— CALCUL INTÉGRAL.

1. PRIMITIVES ET INTÉGRALE DÉFINIE.

1.1. Primitives d'une fonction.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un **intervalle** $I \subset \mathbb{R}$.

1.1.1. DÉFINITION. *Une **primitive** de $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable $F : I \to \mathbb{R}$ qui vérifie $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.*

Toute primitive F de $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I.

1.1.2. EXEMPLE. La fonction $f(x) = \sin x$ a pour primitives les fonctions :

$F_C(x) = -\cos x + C$ (C constante arbitraire).

1.1.3. THÉORÈME. *Toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ possède des primitives.*

1.1.4. PROPOSITION. *Si f et g admettent des primitives F et G, alors $f + g$ et λf ($\lambda \in \mathbb{R}$) admettent $F + G$ et λF pour primitives.*

1.2. Intégrale indéfinie.

1.2.1. THÉORÈME. *Si F est une primitive de $f : I \to \mathbb{R}$, toutes les primitives de f sont de la forme $F(x) + C$ où C est une constante arbitraire.*

1.2.2. NOTATION. Si $f : I \to \mathbb{R}$ possède une primitive F, on note

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

la famille de toutes les primitives de f.

On dit que $\int f(x)dx$ est l'***intégrale indéfinie*** de la fonction f.

1.2.3. EXEMPLE. $\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$.

1.2.4. PROPOSITION. *Si f, g possèdent des primitives, on a :*

$$\int \big(f(x)+g(x)\big)\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx, \quad \int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

1.3. Intégrale définie.

On suppose que $f : I \to \mathbb{R}$ possède une primitive F. Soient $a, b \in I$ deux points de l'intervalle I.

1.3.1. THÉORÈME. *La différence $F(b) - F(a)$ ne dépend pas du choix de la primitive F de f.*

1.3.2. DÉFINITION. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ possède une primitive F et $a, b \in I$, on appelle **intégrale définie** de la fonction f entre a et b le nombre*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_{x=a}^{x=b}.$$

1.3.3. EXEMPLE. $\int_{\pi/2}^{0} \cos x dx = [\sin x]_{x=\pi/2}^{x=0} = -1$.

1.3.4. THÉORÈME. *Si $f, g : I \to \mathbb{R}$ possèdent des primitives, on a pour $a, b, c \in I$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:*

(i) $\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;

(ii) $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$;

(iii) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx$ *(relation de Chasles).*

2. CALCUL DES PRIMITIVES.

2.1. Primitives usuelles.

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1), \quad \int \frac{dx}{x} = ln|x| + C,$$

$$\int e^{x}dx = e^{x} + C, \quad \int a^{x} = \frac{a^{x}}{ln\,a} + C \quad (a > 0),$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x\, dx = \sin x + C,$$

$$\int sh x\, dx = ch x + C, \quad \int ch x\, dx = sh x + C,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^{2}} = Arctan\, x + C, \quad \int \frac{dx}{1-x^{2}} = \frac{1}{2} ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^{2} x} = \tan x + C, \quad \int \frac{dx}{ch^{2} x} = thx + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = Arc\sin x + C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^{2}+a}} = ln\left|x + \sqrt{x^{2}+a}\right| + C,$$

$$\int \tan x\, dx = -ln|\cos x| + C.$$

2.2. Intégration par parties.

2.2.1. THÉORÈME. *Soient u, v deux fonctions dérivables à dérivées continues sur $[a,b]$. On a :*

$$\int_{a}^{b} u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_{a}^{b} u'(x)v(x)dx$$

et, en termes de primitives :

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

2.2.2. EXEMPLE. Pour calculer $\int xe^{x}dx$, on pose $u = x, dv = e^{x}dx$. On a : $du = dx, v = e^{x}$, d'où $\int xe^{x}dx = \int udv = uv - \int vdu = xe^{x} - \int e^{x}dx = xe^{x} - e^{x} + C$.

2.3. Intégration par changement de variable.

2.3.1. THÉORÈME. *Soit $u : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ une fonction à dérivée continue telle que $u(\alpha) = a, u(\beta) = b$. Pour toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, on a :*

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(u(t))u'(t)dt$$

et, en termes de primitives :

$$\int f(x)dx = \int f(u(t))u'(t)dt\Big|_{u(t)=x}.$$

2.3.2. RÈGLE PRATIQUE. Pour effectuer le changement de variable $x = u(t)$ dans l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$, on remplace x par $u(t)$, l'élément différentiel dx par $u'(t)dt$, puis $a = u(\alpha)$ par α et $b = u(\beta)$ par β. Dans la formule de calcul des primitives par changement de variable, la primitive au second membre est une fonction de t qu'il convient d'exprimer dans la variable x en utilisant la relation $u(t) = x$.

2.3.3. REMARQUE. Pour calculer $\int_a^b f(x)dx$, il est fréquent d'introduire une nouvelle variable t en posant $v(x) = t$. Dans ce cas, plutôt que de revenir à la formule du changement de variable $x = u(t)$, où $u = v^{-1}$ est la fonction réciproque de v, on utilise la relation $dt = v'(x)dx$ pour exprimer directement l'élément différentiel dx en fonction de dt.

2.3.4. EXEMPLE. Pour calculer $\int tan\, x\, dx = \int \frac{sin\, x}{cos\, x} dx$, on pose $cos\, x = t$ d'où $dt = -sin\, x\, dx$ et donc $\int tan\, x\, dx = \int \frac{-dt}{t} = -ln|t| + C = -ln|cos\, x| + C$. En termes d'intégrale définie, on a ainsi : $\int_o^{\pi/4} tan\, x\, dx = -\int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{t} = ln \frac{2}{\sqrt{2}}$.

3. INTÉGRATION DES FRACTIONS RATIONNELLES.

3.1. Décomposition en éléments simples.

3.1.1. THÉORÈME. *Toute fraction rationnelle* $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, *où* $P, Q\ (Q \neq 0)$ *sont des polynômes à coefficients réels sans facteurs communs, se décompose en la somme d'un polynôme* $E(x)$ *à coefficients réels (la* ***partie entière*** *de* R*) et d'une fraction rationnelle* $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ *avec* $deg(P_1) < deg(Q)$:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}.$$

3.1.2. On obtient la partie entière d'une fraction rationnelle $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en effectuant la division euclidienne (selon les puissances décroissantes de x) de P par Q :

$$P(X)=Q(X)E(X)+P_1(X),\ deg(P_1)<deg(Q),$$

et en divisant cette dernière relation par $Q(X)$.

3.1.3. EXEMPLE. On a $\dfrac{x^3-2x+2}{x-1}=x^2+x-1+\dfrac{1}{x-1}$, car la division euclidienne de $P(X)=X^3-2X+2$ par $Q(X)=X-1$ a pour quotient $E(X)=X^2+X-1$ et pour reste $P_1(X)=1$.

3.1.4. THÉORÈME. *Toute fraction rationnelle irréductible $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ à coefficients réels telle que $deg(P)<deg(Q)$ se décompose en somme de fractions élémentaires (appelées **éléments simples**) de la forme :*

$$\frac{A}{(x-a)^n}\ (n\geq 1)\ et\ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\ (n\geq 1\ et\ p^2-4q<0),$$

où A et B sont des constantes.

3.1.5. PRATIQUE DE LA DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES. Pour décomposer une fraction rationnelle irréductible $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en éléments simples, on se ramène tout d'abord au cas où $deg(P)<deg(Q)$. On détermine alors les racines du dénominateur Q et on écrit la décomposition *a priori* de $R(x)$ en utilisant les règles suivantes :

1) Chaque racine réelle a d'ordre $\alpha\geq 1$ de Q détermine une *partie polaire* de la forme

$$P_a(x)=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}\ ;$$

2) Chaque facteur de Q de la forme $(x^2+px+q)^\beta$ (avec $p^2-4q<0$ et $\beta\geq 1$) correspondant à un couple $(u,\bar{u})$ de racines complexes conjuguées de Q d'ordre β détermine une partie polaire de la forme :

$$P_u(x)=\frac{A_1+B_1x}{x^2+px+q}+\frac{A_2+B_2x}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{A_\beta+B_\beta x}{(x^2+px+q)^\beta}\ ;$$

3) La fraction $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est la somme de toutes ces parties polaires :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{a=\text{racine réelle de } Q} P_a(x) + \sum_{(u,\bar{u})=\text{paire de racines complexes de } Q} P_u(x)\ ;$$

4) Les coefficients de chaque partie polaire sont précisés par la méthode des coefficients indéterminés.

3.1.6. EXEMPLE. La fraction rationnelle $\dfrac{3x^3-2x^2+x+2}{(x-1)^2(1+x^2)}$ admet *a priori* une décomposition en éléments simples de la forme :

$$\frac{3x^3-2x^2+x+2}{(x-1)^2(1+x^2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2},$$

où A,B,C,D sont des coefficients à déterminer. En réduisant la fraction rationnelle du second membre au même dénominateur, on obtient :

$$\frac{3x^3-2x^2+x+2}{(x-1)^2(1+x^2)} = \frac{P(x)}{(x-1)^2(1+x^2)},\ \text{où}$$

$$P(x) = x^3(A+C) + x^2(-A+B-2C+D) + x(1+C-2D) + (-A+B+D).$$

Par identification, il vient :

$$\begin{cases} A+C=3 \\ -A+B-2C+D=-2 \\ A+C-2D=1 \\ -A+B+D=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=2 \\ C=2 \\ D=1 \end{cases}$$

et donc :

$$\frac{3x^3-2x^2+x+2}{(x-1)^2(1+x^2)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{2x+1}{1+x^2}.$$

3.2. Intégration des éléments simples.

3.2.1. ÉLÉMENTS SIMPLES DE PREMIÈRE ESPÈCE. L'intégration des éléments simples relatifs à des pôles réels (***1ère espèce***) est immédiate :

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \begin{cases} \ln|x-a| + C & \text{si} \quad n=1 \\ -\dfrac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C & \text{si} \quad n>1. \end{cases}$$

3.2.2. ÉLÉMENTS SIMPLES DE SECONDE ESPÈCE. Pour intégrer les éléments simples relatifs à des pôles complexes conjugués (***2ème espèce***), on écrit :

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,dx + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n},$$

où la première primitive se calcule en utilisant le changement de variable $u = x^2+px+q$. La second primitive se ramène, en utilisant le changement de variable $u = \sqrt{\frac{2}{-\Delta}}\left(x+\frac{p}{2}\right)$ et la forme canonique du trinôme :

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2-4q}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{-\Delta}{2}}\right)^2,$$

à $I_n = \int \frac{du}{(1+u^2)^n}$. Une intégration par parties de I_{n-1} permet d'établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}, puis de calculer I_n à partir de $I_1 = \operatorname{Arc}\tan u + C$.

3.2.3. EXEMPLE. Pour calculer $I_2 = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$, on intègre par parties $I_1 = \int \frac{dx}{1+x^2}$ en posant $u = \frac{1}{1+x^2}$, $dv = dx$, d'où $du = \frac{-2x\,dx}{(1+x^2)^2}$, $v = x$. Il vient :

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2} + \int \frac{2x^2}{(1+x^2)^2}dx = \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{dx}{1+x^2}dx - 2\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

On en déduit que $2I_2 = I_1 + \frac{x^2}{1+x^2}$, d'où :

$$I_2 = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\left(I_1 + \frac{x}{1+x^2}\right) = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{\operatorname{Arc}\tan x}{2} + C.$$

3.3. Intégrales trigonométriques.

3.3.1. CHANGEMENTS DE VARIABLES USUELS. Pour calculer l'***intégrale trigonométrique*** $\int f(x)dx$, où $f(x) = R(\sin x, \cos x)$ est une fonction rationnelle en $\sin x$ et $\cos x$, on utilise si possible l'un des changements de variable suivants :

$$u = \begin{cases} \cos x & \text{si } f(x)dx \text{ est invariant lors du changement de } x \text{ en } -x, \\ \sin x & \text{si } f(x)dx \text{ est invariant lors du changement de } x \text{ en } \pi - x, \\ \tan x & \text{si } f(x)dx \text{ est invariant lors du changement de } x \text{ en } \pi + x. \end{cases}$$

Sinon, en posant $u = \tan\frac{x}{2}$, on est ramené au calcul de $\int g(u)du$ où g est une fraction rationnelle en u.

3.3.2. EXEMPLE. Pour calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x \sin^3 x}{1+\sin^2 x}dx$, on observe que $f(x)dx$ est invariant par changement de x en $-x$. On pose donc $u = \cos x$, d'où $du = -\sin x\, dx$ et

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x \sin^3 x}{1+\sin^2 x}dx = \int_1^0 \frac{u^3(1-u^2)}{2-u^2}(-du) = \int_0^1 \frac{u^5-u^3}{u^2-2}du.$$

Comme $\frac{u^5-u^3}{u^2-2} = u^3 + u + \frac{2u}{u^2-2}$, on obtient :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x \sin^3 x}{1+\sin^2 x}dx = \int_0^1 \frac{u^5-u^3}{u^2-2}du = \left[\frac{u^4}{4} + \frac{u^2}{2} + \ln\left|u^2-2\right|\right]_{u=0}^{u=1} = \frac{3}{4} - \ln 2.$$

4. INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE.

4.1. L'intégrale de Cauchy.

4.1.1. THÉORÈME. *Pour toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, on a (**formule de Cauchy**) :*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\Big(f(a) + f(a+\frac{b-a}{n}) + f(a+2\frac{b-a}{n}) + \dots$$
$$\dots + f(a+(n-1)\frac{b-a}{n})\Big).$$

Cette formule peut servir à définir l'intégrale simple des fonctions continues.

4.1.2. INTÉGRALE ET MOYENNE. Dans la formule de Cauchy, on peut remplacer les nombres $a+i\dfrac{b-a}{n}$ par des nombres $x_i \in \left[a+i\dfrac{b-a}{n}, a+(i+1)\dfrac{b-a}{n}\right]$ pris au hasard pour tout n fixé. On a ainsi :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{f(x_o)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})}{n},$$

ce qui justifie le nom de ***moyenne de*** f *sur* $[a,b]$ donné au nombre $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

4.1.3. EXTENSION DE LA FORMULE DE CAUCHY. La formule de Cauchy garde un sens lorsque f est seulement continue par morceaux sur $[a,b]$, ou monotone sur $[a,b]$. Elle permet de définir l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ pour des fonctions plus générales que les fonctions continues, sans supposer l'existence d'une primitive pour f. La formule de Cauchy

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i$$

fait également apparaître l'intégrale de f entre a et b comme le résultat de la ***sommation des infiniment petits*** $f(x_i)\Delta x_i$, produits de la valeur de f en un point x_i par l'accroissement $\Delta x_i = \dfrac{b-a}{n}$ de la variable. Cette interprétation de l'intégrale définie a son importance en physique comme en mathématiques.

4.2. Propriétés de l'intégrale simple.

4.2.1. THÉORÈME. *Si $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sont des fonctions continues, on a :*

(i) LINÉARITÉ : $\int_a^b(\lambda f(x)+\mu g(x))dx = \lambda\int_a^b f(x)dx+\mu\int_a^b g(x)dx$;

(ii) CROISSANCE : $f(x)\le g(x)$ *pour tout* $x \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

En particulier :

$m\le f(x)\le M$ *pour tout* $x \;\Rightarrow\; m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$;

(iii) Majoration de l'intégrale : $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$;

(iv) $\int_a^b |f(x)|dx = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0$ *pour tout* $x \in [a,b]$;

(v) Théorème de la moyenne : il existe $c \in [a,b]$ *tel que l'on ait :*

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

4.2.2. L'INTÉGRALE COMME FONCTION DE SA BORNE SUPÉRIEURE. Les primitives d'une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$. On a donc :

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \text{ quel que soit } x \in [a,b].$$

4.2.3. THÉORÈME (Théorème fondamental du calcul infinitésimal). *Pour toute fonction* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *dérivable à dérivée continue, on a :*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt \text{ quel que soit } x \in [a,b].$$

Ce résultat exprime précisément, au moyen de l'intégrale définie, la relation qui existe entre une fonction et sa dérivée. La connaissance de la dérivée et de la valeur de la fonction en un point déterminent cette fonction.

5. APPLICATIONS DU CALCUL INTÉGRAL.

5.1. Calculs d'aires.

5.1.1. THÉORÈME. *Si* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est continue et positive, l'aire de la portion de plan* $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b \text{ et } 0 \le y \le f(x)\}$ *est définie par :*

$$Aire(S) = \int_a^b f(x)dx.$$

5.1.2. EXEMPLE. Calculons l'aire du disque $D(0,R)$ de centre 0 et de rayon $R>0$. Cette aire est égale à quatre fois l'aire du quart de disque d'équation $y=\sqrt{R^2-x^2}$ ($0\le x\le R$). On a donc :

$$Aire(D(0,R))=4\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx\,.$$

En posant $x=R\cos\theta$ ($0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$), il vient :

$$4\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx=4R^2\int_0^{\pi/2}\sin^2\theta\,d\theta=2R^2\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2\theta)\,d\theta$$
$$=2R^2\left[\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2}=\pi R^2\,,$$

et l'aire du disque de rayon R est égale à πR^2.

5.2. Longueur des courbes.

5.2.1. THÉORÈME. *Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est continue et positive, la longueur de la courbe $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid a\le x\le b\ \text{ et }\ y=f(x)\}$ est donnée par :*

$$Longueur(C)=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\,.$$

5.2.2. EXEMPLE. La longueur de la chaînette C d'équation :

$$y=chx\qquad(-1\le x\le 1)$$

est donnée par :

$$Longueur(C)=\int_{-1}^1\sqrt{1+sh^2(x)}\,dx=\int_{-1}^1 chx\,dx=[shx]_{x=-1}^{x=1}=\frac{e^2-1}{e}\,.$$

5.3. Calcul des volumes.

5.3.1. THÉORÈME. *Soit V un volume de l'espace rapporté à un repère orthonormé $Oxyz$. On suppose que V est inclus dans la portion d'espace limité par les plans $z=a$ et $z=b$ ($a<b$), et que sa section $S(t)$ par le plan $z=t$ ($a\le t\le b$) est une surface dont l'aire varie continûment avec t. Alors, le volume de V est donné par :*

$$Volume(V)=\int_a^b Aire(S(t))\,dt\,.$$

5.3.2. EXEMPLE. Calculons le volume d'une pyramide P de base un triangle T et de hauteur $h > 0$. A cet effet, plaçons le sommet de la pyramide à l'origine du repère et la base dans le plan d'équation $z = h$. La section $S(t)$ de la pyramide par le plan d'équation $z = t$ $(0 \leq t \leq h)$ est homothétique de la base T dans l'homothétie de centre 0 et de rapport $\frac{t}{h}$. L'aire de $S(t)$ est donc :

$$Aire(S(t)) = \left(\frac{t}{h}\right)^2 Aire(T).$$

Il s'ensuit que le volume de la pyramide est donné par :

$$Volume(P) = \int_0^h Aire(S(t))\,dt = \int_0^h \left(\frac{t}{h}\right)^2 Aire(T)\,dt = \frac{h}{3} Aire(T).$$

THÉORÈME. *Le volume d'une pyramide de base triangulaire est égale au tiers du produit de sa hauteur par la surface de sa base.*

___

VIII.— ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

1. DÉFINITIONS GÉNÉRALES.

1.1. Équations différentielles d'ordre 1.

1.1.1. DÉFINITION. *Une **équation différentielle d'ordre 1** est une relation de la forme*

$$(1)\ \ y' = f(x,y).$$

entre une fonction $y = y(x)$, sa dérivée et la variable x.

1.1.2. SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE. L'inconnue de l'équation différentielle (1) est la fonction y, qui doit être dérivable sur un intervalle ouvert à préciser (le plus grand possible) et vérifier en tout point x de cet intervalle la relation $y'(x) = f(x, y(x))$.

Résoudre l'équation différentielle (1), c'est déterminer toutes ses ***solutions*** (ou ***intégrales***) c'est à dire toutes les fonctions dérivables $y = y(x)$ qui vérifient l'équation $y'(x) = f(x, y(x))$.

1.1.3. EXEMPLE. L'équation différentielle $y' = 2y + x$ a pour intégrales les fonctions de la forme $y(x) = -\dfrac{2x+1}{4} + Ce^{2x}$ ($x \in \mathbb{R}$), où C est une constante arbitraire.

1.2. Équations différentielles d'ordre 2.

1.2.1. DÉFINITION. *Une **équation différentielle d'ordre 2** est une relation de la forme*

$$y'' = f(x,y,y')$$

qui exprime la dérivée seconde y'' d'une fonction $y = y(x)$ à partir de y, de sa dérivée y' et de la variable x.

Résoudre l'équation différentielle $y'' = f(x,y,y')$, c'est déterminer toutes les fonctions deux fois dérivables $y = y(x)$ qui vérifient pour tout x la relation :

$$y''(x) = f(x,y(x),y'(x)).$$

1.2.2. EXEMPLE. L'équation $y'' = -2y$ a pour solutions les fonctions de la forme $y(x) = A\cos(\sqrt{2}x) + B\sin(\sqrt{2}x)$ ($x \in \mathbb{R}$), où A et B sont des constantes arbitraires.

2. ÉQUATIONS À VARIABLES SÉPARABLES.

2.1. Définition.

*Une **équation différentielle à variables séparables** est une équation différentielle d'ordre 1 de la forme :*

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)} \quad \Leftrightarrow \quad g(y)y' = f(x),$$

où les fonctions f et g sont supposées continues.

2.2. Méthode d'intégration.

2.2.1. L'équation différentielle $y' = \dfrac{f(x)}{g(y)}$ s'écrit, en séparant les variables x et y, sous la forme $g(y)dy = f(x)dx$. Ses intégrales sont alors formellement données par $\int g(y)dy = \int f(x)dx$, d'où :

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)} \quad \Leftrightarrow \quad \int g(y)dy = \int f(x)dx.$$

En d'autres termes, on a :

2.2.2. THÉORÈME. *Si G est une primitive de g et F une primitive de f, les solutions $y = y(x)$ de l'équation différentielle $y' = \dfrac{f(x)}{g(y)}$ vérifient :*

$$G(y(x)) = F(x) + C \text{ où } C \text{ est une constante.}$$

2.2.3. RÉSOLUTION EXPLICITE. La relation $G(y(x)) = F(x) + C$ ne détermine y en fonction de x que de manière implicite. Lorsque G possède une fonction réciproque G^{-1}, la valeur de y en fonction de x est donnée par :

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C).$$

2.3. Exemple.

Soit à résoudre l'équation différentielle $y' = xy$.

Cette équation différentielle s'écrit, en séparant les variables : $\frac{dy}{y} = xdx$. Elle s'intègre sous la forme $\int \frac{dy}{y} = \int xdx$ et ses solutions vérifient $ln|y| = \frac{x^2}{2} + A$ où A est une constante réelle. Il s'ensuit que $y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$ où C est une constante arbitraire.

3. ÉQUATIONS HOMOGÈNES.

3.1. Définition.

*Une **équation différentielle homogène** est une équation différentielle d'ordre 1 de la forme :*

$$(1)\quad y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

où la fonction f est supposée continue.

3.2. Méthode de résolution.

3.2.1. CHANGEMENT DE VARIABLE *y = tx*. Pour résoudre l'équation différentielle homogène $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, on introduit la fonction $t = t(x) = \frac{y}{x}$. De la relation $y = tx$ on tire $y' = t'x + t$, d'où l'équation à variables séparables :

$$t' = \frac{f(t)-t}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dt}{f(t)-t} = \frac{dx}{x}.$$

On a donc :

$$y' = f(\frac{y}{x}) \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dt}{f(t)-t} = \int \frac{dx}{x} \quad avec \quad y = tx.$$

Cette méthode permet de déterminer x en fonction de t, puis y en fonction de t. En prenant t comme nouveau paramètre, on obtient donc les solutions sous forme paramétrique :

$$x = x(t), y = y(t).$$

3.2.2. SOLUTIONS SINGULIÈRES. La méthode de résolution indiquée ci-dessus laisse de côté les ***solutions singulières*** qui sont de la forme $y = t_o x$, où t_o vérifie $f(t_o) = t_o$. Il convient donc d'étudier séparément l'existence de solutions singulières.

3.3. Exemple.

Soit à résoudre l'équation différentielle $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2$

Cette équation différentielle s'écrit, en posant $y = tx$: $\frac{dt}{t^2 - t} = \frac{dx}{x}$. Par intégration, on obtient $\int \frac{dt}{t^2 - t} = \int \frac{dx}{x}$ et donc $ln\left|\frac{t-1}{t}\right| = ln|x| + C^{ste}$. On en déduit que $x(t) = C\frac{t-1}{t}, y(t) = C(t-1)$ et donc que les solutions de l'équation proposée sont de la forme $y = \frac{Cx}{C-x}$, où C est une constante arbitraire. Les solutions singulières sont $y = 0$ (qui correspond au cas où $C = 0$), et $y = x$ (qui est nouvelle).

4. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU PREMIER ORDRE.

4.1. Généralités.

4.1.1. DÉFINITION. *Une **équation différentielle linéaire du premier ordre** est une équation de la forme :*

$$(E) \quad y'+a(x)y=b(x),$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I.

4.1.2. ÉQUATION HOMOGÈNE ASSOCIÉE. L'équation différentielle :

$$(EH) \quad y'+a(x)y=0$$

est appelée ***l'équation homogène associée*** à (E). De la linéarité de l'application $y \rightarrow -ay$, on déduit :

4.1.3. THÉORÈME. *La solution générale y de l'équation différentielle linéaire du premier ordre $(E) \quad y'+a(x)y=b(x)$ est la somme*

$$y=y_H+y_P$$

de la solution générale y_H de l'équation homogène (EH) et d'une solution particulière y_P de (E). Les solutions de l'équation homogène forment un espace vectoriel de dimension 1.

Les solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dépendent donc toujours d'une constante arbitraire.

4.2. Méthode de résolution.

4.2.1. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION HOMOGÈNE. Pour résoudre l'équation différentielle linéaire $(E) \ y'+a(x)y=b(x)$, on détermine d'abord les solutions y_H de l'équation homogène (EH). Cette dernière est une équation à variables séparables, qui s'écrit $\dfrac{dy}{y}=-a(x)dx$. Elle a pour solution générale :

$$y_H(x)=Ce^{-A(x)}$$

où C est une constante et $A(x)=\int a(x)dx$ *une* primitive de $a=a(x)$.

4.2.2. RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION COMPLÈTE. Pour résoudre l'équation complète (E), on cherche ses solutions sous la forme :

$$y(x)=C(x)e^{-A(x)}$$ (***méthode de variation de la constante***).

L'équation (E) se réduit alors à $C'(x)=b(x)e^{A(x)}$. Par intégration, on obtient :

$$C(x)=\int b(x)e^{A(x)}dx+C,$$

où $\int b(x)e^{A(x)}dx$ désigne *une* primitive de $b(x)e^{A(x)}$ et C est une constante arbitraire.

En conclusion :

4.2.3. THÉORÈME. *Les solutions de l'équation linéaire du premier ordre $y'+a(x)y=b(x)$, où a et b sont des fonctions continues, sont les fonctions de la forme :*

$$y(x)=C(x)e^{-A(x)} \text{ avec } A(x)=\int a(x)dx \text{ et } C(x)=\int b(x)e^{A(x)}dx+C^{ste}.$$

4.3. Exemple.

Soit à résoudre l'équation différentielle $y'+y\tan x=\dfrac{1}{\cos x}$ $(0<x<\dfrac{\pi}{2})$.

Cette équation différentielle linéaire du premier ordre a pour équation homogène associée $\dfrac{dy}{y}=-\dfrac{\sin x}{\cos x}dx$. La solution de cette équation homogène est $y_H(x)=C\cos x$, où C est une constante arbitraire. La solution de l'équation complète est de la forme $y(x)=C(x)\cos x$, avec $C'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$, d'où $C(x)=\tan x+C^{ste}$. La solution générale de l'équation proposée est donc :

$$y(x)=\sin x+C\cos x \quad (C \text{ constante arbitraire}) ;$$

elle est la somme la solution particulière $y_P(x)=\sin x$ et de $y_H(x)=C\cos x$.

5. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS.

5.1. Généralités.

5.1. DÉFINITION. *Une* ***équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants*** *est une équation de la forme :*

$$(E) \quad y''+ay'+by=f(x),$$

*où a et b (les **coefficients** de l'équation) sont des réels et f (le **second membre**) une fonction continue sur un intervalle I.*

5.2. ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE. L'équation différentielle :

$$(EH)\quad y''+ay'+by=0$$

est appelée ***l'équation homogène*** associée à (E). Le polynôme

$$P_C(X)=X^2+aX+b$$

est appelé ***polynôme caractéristique*** de l'équation homogène (EH). L'équation $P_C(z)=0$ est appelée l'***équation caractéristique*** ; c'est une équation du second degré à coefficients réels dont on note $\Delta=a^2-4b$ le discriminant.

5.2. Résultats liés à la linéarité.

5.2.1. THÉORÈME. *La solution générale y de l'équation différentielle*

$$(E):\ y''+ay'+by=f(x)$$

*est la somme de la **solution générale** y_H de l'équation homogène (EH) et d'une **solution particulière** y_P de l'équation complète :*

$$y=y_H+y_P\,.$$

La résolution de l'équation différentielle (E) se ramène donc à celle de l'équation homogène associée (voir 5.3) et à la recherche d'une solution particulière (voir 5.4).

5.2.2. THÉORÈME. *La solution générale y_H de l'équation homogène*

$$(EH):\ y''+ay'+by=0$$

*est une combinaison linéaire quelconque de deux **solutions fondamentales** y_1, y_2 (voir leur expression en 5.3) qui ne dépendent que des racines de l'équation caractéristique :*

$$y_H=C_1y_1+C_2y_2\qquad (C_1,C_2 \text{ constantes arbitraires}).$$

L'espace des solutions de l'équation homogène est donc un espace vectoriel de dimension deux. Il s'ensuit que la solution générale de (E) dépend de deux constantes.

5.2.3. WRONSKIEN. Les solutions fondamentales y_1 et y_2 ont la propriété que les deux vecteurs du plan :

$$\begin{pmatrix} y_1(x)\\ y'_1(x)\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} y_2(x)\\ y'_2(x)\end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendants en tout point x. Leur ***wronskien***

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix}$$

ne s'annule donc jamais. On en déduit que :

5.2.4. THÉORÈME. *La solution générale y de l'équation différentielle :*

$$(E)\ :\ y''+ay'+by=f(x)$$

est de la forme :

$$y(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x),$$

où y_1, y_2 sont les solutions fondamentales de l'équation homogène (EH) et où les fonctions $C_1(x)$ et $C_2(x)$ sont dérivables et vérifient pour tout x :

$$C'_1(x)y_1(x)+C'_2(x)y_2(x)=0.$$

La recherche des solutions de l'équation complète par la ***méthode de variation des constantes*** (voir 5.5) est basée sur ce résultat.

5.3. Résolution de l'équation homogène.

5.3.1. THÉORÈME. *La solution générale de l'équation homogène :*

$$(EH)\quad y''+ay'+by=0$$

est de la forme :

$$y_H=C_1y_1+C_2y_2\ \ (C_1, C_2 \text{ constantes arbitraires}),$$

où les solutions fondamentales y_1 et y_2 sont données, selon le signe du discriminant $\Delta=a^2-4b$ de l'équation caractéristique, par les formules suivantes :

1er cas *: $\Delta>0$. Alors, $y_H(x)=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}$ où λ_1, λ_2 sont les deux racines réelles (distinctes) de l'équation caractéristique ;*

2ème cas *: $\Delta=0$. Alors, $y_H(x)=C_1e^{\lambda x}+C_2xe^{\lambda x}=e^{\lambda x}(C_1+C_2x)$ où λ est la racine (réelle) double de l'équation caractéristique ;*

3ème cas *: $\Delta<0$. Dans ce cas, on a :*

$$y_H(x)=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$

où $\lambda_1=\alpha+i\beta$ et $\lambda_2=\alpha-i\beta$ $(\beta\neq 0)$ sont les deux racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

5.3.2. EXEMPLE. Les solutions de l'équation homogène $y''-4y'+29y=0$ sont les fonctions de la forme $y(x)=e^{2x}(C_1\cos 5x+C_2\sin 5x)$, où les constantes C_1, C_2 sont arbitraires. En effet, les racines de l'équation caractéristique sont les deux nombres complexes conjugués $2\pm i5$.

5.4. Recherche d'une solution particulière de l'équation complète dans quelques cas particuliers.

5.4.1. Lorsque le second membre $f(x)$ est d'un certain type, on peut rechercher une solution particulière y_P de l'équation

$$y''+ay'+by=f(x)$$

sous une forme *a priori* (méthode des coefficients indéterminés). On a ainsi :

5.4.2. THÉORÈME. *Lorsque **f(x)=P(x)** est un **polynôme P(x) de degré n**, on cherche une solution particulière de (E) sous la forme*

$$y(x)=Q(x)$$

où Q est un polynôme à coefficients réels dont le degré vérifie :

$$\deg Q \leq \begin{cases} n & \text{si } 0 \text{ n'est pas racine de l'équation caractéristique;} \\ n+1 & \text{si } 0 \text{ est racine simple de l'équation caractéristique;} \\ n+2 & \text{si } 0 \text{ est racine double de l'équation caractéristique.} \end{cases}$$

La détermination explicite de Q se fait par la méthode des coefficients indéterminés.

5.4.3. THÉORÈME. *Lorsque **f(x)=P(x)e^{rx}** où **P(x)** est un **polynôme de degré n**. on cherche une solution particulière de (E) sous la forme*

$$y(x)=Q(x)e^{rx}$$

où Q est un polynôme à coefficients réels dont le degré vérifie :

$$deg\, Q \leq \begin{cases} n & \text{si } r \text{ n'est pas racine de l'équation caractéristique;} \\ n+1 & \text{si } r \text{ est racine simple de l'équation caractéristique;} \\ n+2 & \text{si } r \text{ est racine double de l'équation caractéristique.} \end{cases}$$

La détermination de Q se fait également par la méthode des coefficients indéterminés.

5.4.4. THÉORÈME. *Lorsque* ***f(x)=P(x)e^rx^costx*** ou ***f(x)=P(x)e^rx^sintx****,* où ***P(x)*** est un **polynôme de degré** ***n****, on cherche une solution particulière de* (E) *sous la forme*

$$y(x) = e^{rx}\left(Q(x)\cos tx + R(x)\sin tx\right)$$

où Q, R *sont des polynômes à coefficients réels dont les degrés vérifient :*

$$deg\, Q, deg\, R \leq \begin{cases} n & \text{si } r+it \text{ n'est pas racine de l'équation caractéristique;} \\ n+1 & \text{si } r+it \text{ est racine de l'équation caractéristique.} \end{cases}$$

Si le second membre est de la forme $f(x) = e^{rx}\left(P(x)\cos tx + Q(x)\sin tx\right)$, on cherchera une solution particulière sous la forme $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$, où y_1 est solution particulière pour le second membre $f_1(x) = P(x)e^{rx}\cos tx$ et y_2 est solution particulière pour le second membre $f_2(x) = Q(x)e^{rx}\sin tx$.

5.4.5. EXEMPLE. *Soit à résoudre l'équation* $y'' + 2y' + 5y = 2\cos x$.

Les racines de l'équation caractéristique sont les nombres complexes conjugués $-1 \pm 2i$. La solution générale de l'équation homogène est donc :

$$y_H(x) = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x),$$

où les constantes C_1, C_2 sont arbitraires. Comme i n'est pas racine de l'équation caractéristique, on peut chercher une solution particulière sous la forme $y_P(x) = A\cos x + B\sin x$. En portant cette expression de y_P dans l'équation complète, on trouve que les coefficients A et B doivent vérifier :

$$2\cos x = (4A + 2B)\cos x + (4B - 2A)\sin x,$$

d'où $4A + 2B = 2$ et $4B - 2A = 0$. Il s'ensuit que $A = \frac{2}{5}$ et $B = \frac{1}{5}$, d'où $y_P(x) = \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$. La solution générale de l'équation complète est donc :

$$y(x)=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\frac{2}{5}\cos x+\frac{1}{5}\sin x.$$

5.5. Méthode de variation des constantes.

5.5.1. PRINCIPE DE LA MÉTHODE. Pour résoudre l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

$$(E)\quad y''+ay'+by=f(x)$$

connaissant la solution $y_H(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ de l'équation homogène associée, on cherche la solution générale y de (E) sous la forme :

$$y(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)$$

(on fait *«varier les constantes C_1 et C_2 »),* où les fonctions $C_1(x)$ et $C_2(x)$ sont dérivables et vérifient la relation :

$$C'_1(x)y_1(x)+C'_2(x)y_2(x)=0.$$

L'équation (E) s'écrit alors :

$$C'_1(x)y'_1(x)+C'_2(x)y'_2(x)=f(x),$$

de sorte que les dérivées des fonctions $C_1(x)$ et $C_2(x)$ vérifient le système de Cramer :

$$\begin{cases}C'_1(x)y_1(x)+C'_2(x)y_2(x)=0\\ C'_1(x)y'_1(x)+C'_2(x)y'_2(x)=f(x).\end{cases}$$

La résolution de ce système fournit des expressions de $C'_1(x)$ et $C'_2(x)$ en fonction de la variable x, et on détermine les fonctions $C_1(x)$ et $C_2(x)$ par intégration.

5.5.2. EXEMPLE. *Soit à résoudre l'équation différentielle* $y''-4y=2x^2-1$.

L'équation homogène associée a pour solutions $y_H(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$, où C_1 et C_2 sont deux constantes arbitraires. On cherche donc la solution générale de l'équation proposée sous la forme :

$$y(x)=C_1(x)e^{2x}+C_2(x)e^{-2x}.$$

Les fonctions $C_1(x)$ et $C_2(x)$ doivent vérifier le système de Cramer :

$$\begin{cases}C'_1e^{2x}\quad+C'_2e^{-2x}=0\\ 2C'_1e^{2x}-2C'_2e^{-2x}=2x^2-1,\end{cases}$$

d'où l'on déduit que :

$$C'_1(x) = e^{-2x}\left(\frac{2x^2-1}{4}\right) \text{ et } C'_2(x) = e^{2x}\left(\frac{1-2x^2}{4}\right).$$

On a donc :

$$C_1(x) = \int e^{-2x}\left(\frac{2x^2-1}{4}\right)dx = -\frac{e^{-2x}}{4}(x^2+x)+C_1$$

et

$$C_2(x) = \int e^{2x}\left(\frac{1-2x^2}{4}\right)dx = \frac{e^{2x}}{4}(-x^2+x)+C_2\,,$$

d'où finalement :

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - \frac{x^2}{2}\,,$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes arbitraires.

___