Université Claude Bernard, Lyon I
43, Boulevard du 11 Novembre 1918
69622 Villeurbanne Cedex, France

Licence Sciences et Technologies
L1 PCSI
U.E. : TMB

Contrôle Continu du 12 avril 2013 - 11h45/12h45
Sujet 4

Note. Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits. Les trois exercices sont indépendants.

Exercice 1.
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - (4+5i)z - 1 + 7i = 0 \tag{1}$$

2. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 - (5+5i)z^2 + (3+12i)z + 1 - 7i = 0 \tag{2}$$

(a) Montrer que (2) admet une solution réelle z_0 que l'on déterminera.
(b) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$z^3 - (5+5i)z^2 + (3+12i)z + 1 - 7i = (z - z_0)(z^2 + az + b)$$

où $a, b \in \mathbb{C}$ sont des nombres complexes à déterminer.
(c) Résoudre (2).

Exercice 2.
Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on pose $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

1. Ecrire l'équation cartésienne du plan P orthogonal au vecteur $\vec{u}$ passant par $A(3, 2, 3)$.
2. Ecrire la représentation paramétrique de la droite Δ passant par $B(1, 1, 1)$ et parallèle au vecteur $\vec{u}$.
3. Déterminer le point d'intersection de Δ avec le plan P.
4. En déduire la projection orthogonale de B sur P.

Exercice 3.
1. Calculer

$$A = \operatorname{sh}\left(\frac{\ln 3}{2}\right) \qquad\qquad B = \operatorname{ch}\left(\frac{\ln 3}{2}\right)$$

2. En admettant la formule

$$\operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{sh}(b)\operatorname{ch}(a), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$2\operatorname{sh}(7x) - \operatorname{ch}(7x) = \sqrt{3}\operatorname{sh}(3x)$$