Université Claude Bernard, Lyon I
43, Boulevard du 11 Novembre 1918
69622 Villeurbanne Cedex, France

Licence Sciences et Technologies
L1 PCSI
U.E. : TMB

Contrôle Continu du 11 avril 2013 - 13h30/14h30
Sujet 2

Note. Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits. Les trois exercices sont indépendants.

Exercice 1.
1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - (5+4i)z + 1 + 7i = 0 \tag{1}$$

2. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 - (3+4i)z^2 - (9+i)z + 2 + 14i = 0 \tag{2}$$

(a) Montrer que (2) admet une solution réelle z_0 que l'on déterminera.
(b) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$z^3 - (3+4i)z^2 - (9+i)z + 2 + 14i = (z - z_0)(z^2 + az + b)$$

où $a, b \in \mathbb{C}$ sont des nombres complexes à déterminer.
(c) Résoudre (2).

Exercice 2.
Dans l'espace rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on désigne par A le point de coordonnées $(1, 1, 1)$ et P le plan d'équation cartésienne $x + 2y + 2z - 14 = 0$

1. Calculer la distance d de A à P.
2. Donner un vecteur orthogonal non nul à P, et écrire la représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale à P.
3. Déterminer les coordonnées de la projection orthogonale H de A sur P.
4. Retrouver le fait que $d = \|\overrightarrow{AH}\|$.

Exercice 3.
On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x+y+z, x-y+z, 2x+2y+2z)$, pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

1. Ecrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $\det(A)$.
3. A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse A^{-1}.