FORMULAIRE TMB OFFICIEL

Trigonométrie

Relations entre les lignes trigonométriques

$sin(-x) = -sin\,x$; $cos(-x) = cos\,x$; $cos\,x = sin(x + \frac{\pi}{2}) = sin(\frac{\pi}{2} - x)$;

$tan\,x = \frac{sin\,x}{cos\,x}$; $cos^2 x + sin^2 x = 1$; $cos^2 x = \frac{1}{1 + tan^2 x}$; $sin^2 x = \frac{tan^2 x}{1 + tan^2 x}$.

Addition des arcs

$cos(a+b) = cos\,a\,cos\,b - sin\,a\,sin\,b$; $sin(a+b) = sin\,a\,cos\,b + sin\,b cos a$;

$tan(a+b) = \frac{tan\,a + tan\,b}{1 - tan\,a\,tan\,b}$; $sin\,p + sin\,q = 2\,sin\frac{p+q}{2}cos\frac{p-q}{2}$;

$cos\,p + cos\,q = 2\,cos\frac{p+q}{2}cos\frac{p-q}{2}$; $tan\,p + tan\,q = \frac{sin(p+q)}{cos\,p.cos\,q}$;

$cos\,p - cos\,q = -2\,sin\frac{p+q}{2}sin\frac{p-q}{2}$.

Multiplication des arcs

$cos(2a) = 2\,cos^2 a - 1 = 1 - 2\,sin^2 a = cos^2 a - sin^2 a = \frac{1 - tan^2 a}{1 + tan^2 a}$;

$sin(2a) = 2\,sin\,a\,cos\,a = \frac{2\,tan\,a}{1 + tan^2 a}$; $tan(2a) = \frac{2\,tan\,a}{1 - tan^2 a}$.

Fonctions classiques

Logarithme népérien

La fonction $ln\,x$ est l'unique fonction définie pour $x > 0$ qui vérifie $(ln\,x)' = \frac{1}{x}$ et $ln(1) = 0$.

Elle vérifie les relations : $ln(xy) = ln\,x + ln\,y$, $ln(x^n) = n\,ln\,x$; $ln\frac{1}{x} = -ln\,x$.

Exponentielle

La fonction e^x est la réciproque de la fonction $ln\,x$: $y = e^x \Leftrightarrow x = ln\,y$. Elle vérifie

$(e^x)' = e^x$, $e^0 = 1$, ainsi que les relations : $e^{x+y} = e^x e^y$; $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$; $e^{nx} = (e^x)^n$.

La fonction $x^\alpha = e^{\alpha\,ln\,x}$ généralise la fonction puissance ; la fonction $a^x = e^{x\,ln\,a}$ est une exponentielle de base a.

Fonctions hyperboliques

Elles sont définies par : $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$; $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $thx = \frac{shx}{chx}$.

FORMULES DE TRIGONOMÉTRIE HYPERBOLIQUE : $ch^2a - sh^2a = 1$; $ch^2a = \frac{1}{1 - th^2a}$;

$sh2a = 2sha.cha$; $ch2a = ch^2a + sh^2a = 2ch^2a - 1 = 2sh^2a + 1$.

Dérivées. Formule et développements de Taylor

Dérivées usuelles

$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$; $(e^x)' = e^x$; $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $(\sin x)' = \cos x$; $(\cos x)' = -\sin x$;

$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$; $(shx)' = chx$; $(chx)' = shx$; $(thx)' = \dfrac{1}{ch^2 x} = 1 - th^2 x$;

$(Arc\tan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$; $(Arc\sin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(Arc\cos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Règles de dérivation

DÉRIVÉE DU PRODUIT : Si $F(x)= f(x)g(x)$, alors $F'(x)= f'(x)g(x)+ f(x)g'(x)$.

DÉRIVÉE DU QUOTIENT : Si $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, alors $F'(x)=\dfrac{f'(x)g(x)- f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

DÉRIVÉE DE LA COMPOSÉE : Si $F(x)= f(g(x))$, alors $F'(x)= f'(g(x))g'(x)$.

DÉRIVÉE DE LA RÉCIPROQUE : $y= f(x) \Leftrightarrow x=\varphi(y)$, alors : $f'(x)\times\varphi'(y)=1$.

Formule des accroissements finis

Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, il existe $c\in\,]a,b[$ tel que :

$$f(b)- f(a)=(b-a)f'(c).$$

Formule de Taylor

Si $f, f',\dots, f^{(n)}$ existent et sont continues sur $[a,b]$ et si $f^{(n+1)}$ existe $]a,b[$, il existe $c\in\,]a,b[$ tel que l'on ait :

$$f(b)= f(a)+(b-a)f'(a)+\dots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Développements en série

$e^x = 1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dots+\dfrac{x^n}{n!}+\dots$; $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dots+(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}+\dots$;

$\cos x = 1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\dots$; $\sin x = x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots$;

$chx = 1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\dots$; $shx = x+\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}+\dots+\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots$;

$(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\dots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\dots$;

$\dfrac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots+x^n+\dots$

***