Fiche d'exercices n° 3
Applications linéaires et matrices

1 Exercices obligatoires

Exercice 1. Parmi les applications suivantes indiquer, en justifiant, celles qui sont linéaires :

$$(a)\ f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(x,y)=(2x+3y,3x-5y);\quad (b)\ f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=\sin(x);$$
$$(c)\ f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2, f(x,y,z)=(x+2y,y-z^2);\quad (d)\ f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(x,y)=(x+y,2x+3y);$$
$$(e)\ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=[x] \text{ où } [x] \text{ désigne la partie entière de } x.$$

Exercice 2. On considère les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2 & 1\\-3 & 0\\1 & 2\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}-2 & 5\\5 & 0\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\-1 & -4 & 0\\0 & 2 & 5\end{pmatrix}.$$

Quels sont les produits matriciels possibles? En calculer au moins cinq.

Exercice 3.

(1) On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}a & b\\0 & a\end{pmatrix}$ où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.
(a) Calculer A^2 et A^3.
(b) Calculer A^n pour tout entier n strictement positif.
(2) Calculer le carré de la matrice $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}$.
(3) On considère les trois matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\3 & 1 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\0 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

Calculer AB, AC. Que remarque-t-on?

Exercice 4. Calculer le déterminant et, si elle existe, la matrice inverse des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\2 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}5 & 1\\5 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\2 & 1 & 0\\1 & -1 & 1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\3 & -2 & 0\\-1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Déterminer les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques des espaces vectoriels concernés :

$$(a)\ f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(x,y)=(2x+3y,3x-5y);\quad (b)\ f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(x,y)=(2x-3y,x+y);$$
$$(c)\ f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3, f(x,y)=(2x-y,x+y,x-y);\quad (d)\ f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2, f(x,y,z)=(x+y,y-z).$$

Exercice 6. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ et $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ les deux applications linéaires définies, en coordonnées cartésiennes, par

$$f(x,y)=(2x+y,-y,x-2y),\ g(x,y,z)=(x-z,2y).$$

(1) Calculer les applications composées $g\circ f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ et $f\circ g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$.
(2) Trouver les matrices A et A' qui représentent f et g dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
(3) Vérifier que les produits $A'A$ et AA' représentent les composés $g\circ f$ et $f\circ g$.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x - y, x + y).$$

(1) Déterminer la matrice A dans la base canonique $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ de $\mathbb{R}^2$.
(2) Calculer f^{-1} et en déduire A^{-1}.
(3) Est-ce que l'application f est un isomorphisme?
(4) Si on considère le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^2$, est-ce que l'application f est une isométrie?

2 Exercices supplémentaires

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$f(x, y, z) = (2x - z, -x + 3y + z, z).$$

(1) Calculer $f(\vec{0})$, $f(1, 1, 1)$ et $f(1, 0, -1)$.
(2) Montrer que f est une application linéaire.
(3) Calculer les images de $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ par f où $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. En déduire la matrice de f dans $\mathcal{B}$.

Exercice 9. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice 2×2 à coefficients dans $\mathbb{R}$. Montrer que si A est inversible alors son inverse est donné par la formule

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer AB et BA et les comparer.
(2) Calculer $\det(A)$ et $\det(B)$.
(3) Vérifier par le calcul que $\det(AB) = \det(BA)$. Comparer avec $\det(A) \times \det(B)$.

Exercice 11. On considère la matrice

$$M = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer M^2 ainsi que la matrice $N = 1 - M$. Vérifier que $N^2 = N$.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (-x + y + z, -6x + 4y + 2z, 3x - y + z).$$

Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et vérifier que $A^2 = 2A$.