

## TD 2 : Géométrie du plan et de l'espace.

### I. ESPACES VECTORIELS ET VECTEURS.

#### EXERCICES OBLIGATOIRES.

##### Exercice 1 (Combinaisons linéaires).

Montrer que le vecteur  $\vec{u} = (-4, -3, 2)$  de  $\mathbb{R}^3$  peut s'exprimer comme combinaison linéaire des trois vecteurs

$$\vec{e}_1 = (1, 1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 1), \vec{e}_3 = (1, 0, 1).$$

[C'est-à-dire que  $\vec{u}$  peut s'écrire sous la forme  $\vec{u} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$ , avec  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ .]

##### Exercice 2 (Vecteurs linéairement indépendants).

Les vecteurs suivants de  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  sont-ils linéairement indépendants ?

- |  |  |
|--|--|
| a) $u = (-1, 2)$ et $v = (3, -5)$ .                            | f) $u = (1, 2, 3)$ , $v = (-1, 1, 1)$<br>et $w = (0, 3, 4)$ .  |
| b) $u = (2, -1)$ et $v = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$ .        | g) $u = (1, -1, 3)$ , $v = (-2, 1, 6)$<br>et $w = (0, 0, 1)$ . |
| c) $u = (1, -2, 1)$ et $v = (-3, 6, -3)$ .                     | h) $u = (1, -1, 3)$ , $v = (1, -1, 0)$<br>et $w = (0, 0, 1)$ . |
| d) $u = (3, -1, 1)$ et $v = (6, -2, -2)$ .                     |  |
| e) $u = (1, 2, 3)$ , $v = (-1, 1, 1)$<br>et $w = (0, 1, -1)$ . |  |

##### Exercice 3 (Bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ ).

1. Les vecteurs  $\vec{e}_1 = (-1, 1)$  et  $\vec{e}_2 = (1, 1)$  forment-ils une base de  $\mathbb{R}^2$  ? Si oui, déterminer les coordonnées cartésiennes du point  $A = (3, 4)$  dans le repère  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . Mêmes questions pour les vecteurs  $\vec{e}_1 = (2, -1)$  et  $\vec{e}_2 = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{4})$ .
2. Les vecteurs  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  et  $\vec{e}_3$  de l'exercice 1 forment-ils une base de  $\mathbb{R}^3$  ? Si oui, déterminer les coordonnées cartésiennes du vecteur  $\vec{u} = (-4, -3, 2)$  dans cette base.

##### Exercice 4 (Produit scalaire et vecteurs orthogonaux dans le plan).

Dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan, on considère les deux vecteurs  $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$  et  $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j}$ .

1. Calculer  $\|\vec{u}\|$ ,  $\|\vec{v}\|$  et le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .
2. Calculer et représenter le vecteur  $\vec{u} + \vec{v}$ . Puis déterminer et représenter les deux vecteurs orthogonaux à  $\vec{u}$  et de même norme.

##### Exercice 5 (Produit scalaire et produit vectoriel dans l'espace).

Dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace, on considère les trois vecteurs  $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ,  $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ , et  $\vec{w} = -2\vec{k}$ .

1. Représenter ces trois vecteurs puis calculer  $\|\vec{u}\|$ ,  $\|\vec{v}\|$ ,  $\|\vec{w}\|$  et le produit scalaire  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .
2. Calculer  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ ,  $\vec{v} \wedge \vec{u}$ ,  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$  et  $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$  puis représenter ces vecteurs.
3. Déterminer le produit mixte  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  puis le comparer avec le déterminant de la matrice
 
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

## EXERCICES FACULTATIFS.

### Exercice 6 (Base de $\mathbb{R}^3$ ).

Dans  $\mathbb{R}^3$ , on considère les vecteurs  $\vec{u} = (1, 2, 0)$  et  $\vec{v} = (-6, 0, 2)$ .

1. Montrer que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont linéairement indépendants.
2. Déterminer un vecteur  $\vec{w} \in \mathbb{R}^3$  linéairement indépendant de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .
3.  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  forment-ils une base de  $\mathbb{R}^3$ .

### Exercice 7 (Base de vecteurs dans l'espace).

Dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  de l'espace, on considère les trois vecteurs

$$\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}, \quad \vec{v} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{k}, \quad \vec{w} = -\vec{j}.$$

1. Montrer que les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  forment une base de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$ .
2. Calculer les normes de  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$ ; puis les produits scalaires  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{w}$  et  $\vec{v} \cdot \vec{w}$ .

### Exercice 8 (Identités notables du calcul vectoriel).

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  de l'espace, démontrer les égalités suivantes :

1.  $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$ , et  $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{w})\vec{u}$ .
2.  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| + (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2$ .
3.  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$ .
4. Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux si et seulement si  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ .  
[Indication : Fixer un repère cartésien  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  et effectuer un calcul composante par composante.]

## II. GEOMETRIE ANALYTIQUE DU PLAN ET DE L'ESPACE.

### EXERCICES OBLIGATOIRES.

#### Exercice 9 (Droites du plan, 1).

Dans le plan, on considère les deux points  $A = (1, 2)$  et  $B = (-1, 0)$ . Déterminer :

1. l'équation de la droite  $\Delta$  passant par  $A$  et  $B$ ;
2. l'équation de la droite parallèle à  $\Delta$  passant par  $O$ ;
3. l'équation de la droite perpendiculaire à  $\Delta$  passant par  $O$ ;
4. la distance entre  $A$  et  $B$ ;
5. la distance du point  $C = (1, 1)$  à la droite  $(AB)$ ;
6. [Facultatif] l'aire du parallélogramme de côtés  $\vec{OA}$  et  $\vec{OB}$ .

### Exercice 10 (Droites du plan, 2).

Dans le plan, on considère le point  $A = (5, 3)$  et la droite  $\Delta$  d'équation  $x - y + 1 = 0$ . Déterminer :

1. l'équation de la droite parallèle à  $\Delta$  passant par  $A$ ;
3. l'équation de la droite perpendiculaire à  $\Delta$  passant par  $A$ ;
4. la distance du point  $A$  à la droite  $\Delta$ ;
5. la projection orthogonale de  $A$  sur  $\Delta$ .

### Exercice 11 (Plans de l'espace).

Dans l'espace, on considère le point  $A = (-1, 1, 2)$ . Déterminer les équations des plans suivants :

1. le plan passant par  $A$  et orthogonal au vecteur  $\vec{v} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ;
2. le plan passant par  $A$  et parallèle au plan d'équation  $3x - 2y + 4z - 5 = 0$ ;
3. le plan passant par  $A$ ,  $B = (1, 2, -1)$  et  $C = (3, 0, -1)$ .
4. la distance du point  $E = (1, 1, 0)$  au plan  $(ABC)$ .

### Exercice 12 (Droites de l'espace).

Soient  $A = (1, 0, 2)$ ,  $B = (0, 1, 1)$  et  $C = (1, -1, 0)$  trois points de l'espace. Déterminer :

1. l'écriture paramétrique de la droite  $\Delta$  passant par  $A$  et de vecteur directeur  $\overrightarrow{BC}$ ;
2. l'intersection de la droite  $\Delta$  avec le plan d'équation  $z = 0$ ;
3. le système d'équations cartésiennes caractérisant la droite  $\Delta$ ;
4. l'équation du plan contenant la droite  $\Delta$  et passant par  $O$ ;
5. la distance du point  $E = (1, 2, 3)$  à la droite  $\Delta$ .

[Indication : on commence par chercher l'équation du plan passant par  $E$  et orthogonal à  $\Delta$ .]

6. [Facultatif] le volume du parallélépipède engendré par les trois vecteurs  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$  et  $\overrightarrow{OC}$ .

## EXERCICES FACULTATIFS.

### Exercice 13.

Soient  $A = (2, 5)$ ,  $B = (8, -1)$  et  $C = (10, 5)$  trois points du plan.

1. Déterminer les coordonnées du point  $D$  tel que  $\overrightarrow{AD} = 9\vec{i} + 3\vec{j}$  et montrer que les points  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont alignés.
2. Déterminer le point  $E$  tel que  $ABEC$  soit un parallélogramme et en calculer l'aire.

### Exercice 14.

Soient  $A$  et  $B$  deux points du plan.

1. Déterminer et tracer l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ .
2. Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ .  
(Indication : introduire le point  $I$  milieu de  $[AB]$ .)
3. Considérer les mêmes questions dans l'espace de dimension 3.

**Exercice 15.**

Soient  $A$  et  $B$  deux points de l'espace.

1. Déterminer l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ .
2. Déterminer l'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ .

**Exercice 16.**

Déterminer la longueur de la diagonale du cube unité de  $\mathbb{R}^3$  de deux manières différentes :

1. géométriquement, en utilisant deux fois Pythagore ;
2. analytiquement, en utilisant la distance dans  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 17.**

Dans l'espace, on considère les deux droites

$$\Delta : \begin{cases} x - z - a & = 0 \\ y + 3z + 1 & = 0 \end{cases} \text{ et } \Delta' : \begin{cases} x + 2y + z - 2b & = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 & = 0 \end{cases} \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que les deux droites ne sont pas parallèles.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  pour que  $\Delta$  et  $\Delta'$  soient concourantes. Dans ce cas, déterminer l'équation de leur plan.

**Exercice 18.**

1. Déterminer l'équation cartésienne des plans  $\pi$  contenant la droite  $\Delta : \begin{cases} x = 6 - 3z \\ x = 3y - 7 \end{cases}$  et situés à distance 1 du point  $A = (1, 1, 2)$ .
2. Trouver l'équation cartésienne du plan  $\pi^\perp$  perpendiculaire au plan  $\pi : x - y + z + 24 = 0$  et contenant la droite  $\Delta : \begin{cases} 2x - y + 2z + 4 = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ .

**Exercice 19.**

Trouver la perpendiculaire commune aux deux droites

$$\Delta : \begin{cases} x + y - 3z + 4 = 0 \\ 2x - z + 1 = 0 \end{cases} \text{ et } \Delta' : \begin{cases} x = z - 1 \\ y = z - 1 \end{cases}.$$

**Exercice 20.**

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $\lambda \in \mathbb{R}$  pour que les trois plans  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  et  $\pi_3$  d'équations respectives :

$$\pi_1 : x + \lambda y - z + 1 = 0, \pi_2 : (\lambda + 1)x + 3y + 4z - 2 = 0 \text{ et } \pi_3 : y + (2\lambda + 4)z - (2\lambda + 2) = 0$$

contiennent une même droite