Fiche TD 1 – NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1 Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\left(\frac{-4i+4}{\sqrt{3}+i}\right)^3$

Dans le plan, placer le point M image de ce nombre complexe.

Exercice 2 Déterminer, dans le plan, l'ensemble des points M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que :

a) $(z^2 - 3z + 5) \in \mathbb{R}$ b) $|z - 2i| \leq 9$ c) $2\,\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(2 - 3z) \leq 1$

d) $|z^3 - 5z^{-8}| \leq -1$ e) $\left|\frac{z^2 - 4z}{z+2}\right| < |3z|$ f) $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z-1+i}\right) \geq 1$

Exercice 3 1) Déterminer les racines carrées de chaque nombre complexe

a) $24 + 70i$ b) $2 - 2i\sqrt{3}$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

a) $z^2 + (4 + 2i)z + 6 + 8i = 0$ b) $2i z^2 + (9 - i)z - 11 - 7i = 0$

Exercice 4 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

a) $z^2 + 5 = 0$ b) $z^2 + 2z + 3 = 0$ c) $z^2 + 2iz + 3 = 0$

Exercice 5 1) Déterminer sous forme trigonométrique et sous forme exponentielle les racines cubiques du nombre complexe i, placer l'image de chacune dans le plan.

2) Montrer que la somme de ces racines est nulle.

Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 4 = 0$

En déduire une factorisation du polynôme $X^4 + 4$ en un produit de deux polynômes réels non constants.

Exercice 7 Sachant qu'elle admet une racine réelle entière, résoudre dans l'équation

$z^3 - 2i z^2 + 5i z + 1 + 7i = 0$

http://licence-math.univ-lyon1.fr/doku.php?id=p13:tmb:page

Exercices supplémentaires

Exercice 8 Ecrire sous forme trigonométrique le nombre complexe suivant

$$\left(\sqrt{3} + i\sqrt{3}\right)^4(-\sqrt{3} + 3i)$$

Exercice 9 Déterminer, dans le plan, l'ensemble des points M d'affixe $z \in \mathbb{C}$ tels que :

a) $\dfrac{2z-i}{i\,z+2-3i}$ soit un nombre réel

b) $\left|\dfrac{z-5\,i}{z-3+i}\right| = 1$

c) $\dfrac{i\,z^2}{z+1}$ soit un nombre imaginaire

d) $|z-(2+i)|^2 + |z-4|^2 = 5$

Exercice 10 Soit $\omega = e^{2i\pi/5}$

1) Montrer que : $(\omega + \frac{1}{\omega})^2 + \left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) - 1 = 0$

2) En déduire la valeur de cos $(2\,\pi/5)$

Exercice 11 Résoudre les équations suivantes

a) $z^2 = 2 + 6i$

b) $z^3 + 8\,i = 0$

c) $z^4 + z^2\,(3 + 2i) - 7 + 17i = 0$

d) $z^3 - 2\,(\sqrt{3} + i)z^2 + 4\,(1 + i\sqrt{3})\,z - 8i = 0$ sachant qu'elle admet une solution imaginaire de module entier

e) $z^2 - \bar{z} + 2 = 0$

g) $z^{2n} - 2\,z^n \sin(t) + 1 = 0$ où $n \in \mathbf{N}$ et $n \geq 2$