Université Claude Bernard Lyon 1
Math II - Algèbre

CC2 (séquence 4) - Espaces vectoriels

17 avril 2013 – durée : 30 minutes

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée.

Exercice 1. Soient F et G les deux sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid y = z = 0\}, \\ G &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2y - t = 0\}. \end{aligned}$$

a) Donner une base de F, G, et $F \cap G$.
b) Enoncer la formule de Grassmann et en déduire $\dim(F+G)$.
c) Déterminer une base de $F+G$.

Exercice 2. On condidère la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivante :

$$\mathcal{F} = \{v_1 = (0,0,1), v_2 = (1,0,1), v_3 = (1,0,2), v_4 = (1,0,0)\}.$$

a) On pose $V = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\mathcal{F})$. Extraire de $\mathcal{F}$ une base de V.
b) En déduire $\dim_{\mathbb{R}}(V)$.
c) Exprimer qu'un vecteur (x,y,z) appartient à V par une equation en x, y, z.
d) En déduire du point c) ou montrer directement que le vecteur $w_1 = (7,2,-1) \notin V$.