Université Claude Bernard (Lyon 1) **Jeudi 21 mars 2013**
Licence de Mathématiques 2012/13

Algèbre II

Durée : 1 h 15 minutes

Aucun document n'est autorisé.

---

1 . (3 points) Répondre aux questions suivantes en justifiant :

1. Le sous-ensemble $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = 2x\}$ de $\mathbb{R}^2$, muni des lois habituelles de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, est-il un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ?
2. Le sous-ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, y^2 = x,\ z = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$, muni des lois habituelles de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

2 . (5 points) Déterminer le P.G.C.D. des polynômes

$$A = X^5 + 2X^4 + X^3 - X^2 + 2 \quad \text{et} \quad B = X^4 + 3X^3 + 3X^2 - 2,$$

en utilisant l'algorithme d'Euclide. En déduire les factorisations de A et B dans $\mathbb{R}[X]$.

3 . (6 points) On considère le polynôme $P = X^5 - X^3 + X^2 - 1$.

1. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Décomposer la fraction $\frac{X+1}{P}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

4 . (6 points) Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ on désigne par $P(X+1)$ le polynôme obtenu en remplaçant X par $X+1$ dans P.

1. Existe-t-il des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré trois tels que $P(0) = 1$?
2. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme de degré trois, quel est le degré du polynôme $P(X+1) - P(X)$?
3. Existe-t-il des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré trois qui vérifient :

$$P(X+1) - P(X) = X^2 - 1 \quad \text{et} \quad P(0) = 1?$$

(Indication : On pourra dériver le polynôme P dans l'équation ci-dessus.)

Corrigé

1 . $(1,5+1,5)$

1. Oui. Il suffit de vérifier que E est un sous-espace de $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in E$, et $\forall a,b\in\mathbb{R}$, on a $y_1=2x_1$ et $y_2=2x_2$. Donc $ay_1+by_2=2(ax_1+bx_2)$, c'est-à-dire que $a(x_1,y_1)+b(x_2,y_2)\in E$.
2. Non, car $(1,1,0)\in F$ mais $2(1,1,0)\notin F$.

2 . (3+1+1) Par l'algorithme d'Euclide, on trouve $\operatorname{pgcd}(A,B)=X^2+2X+2$, et puis par division euclidienne on en déduit que

$$A=(X^2+2X+2)(X^3-X+1),\quad B=(X^2+2X+2)(X^2+X-1).$$

Les factorisations de A et B ci-dessus ne sont pas en facteurs irréductibles. Le polynôme (X^3-X+1) de degré trois a toujours une racine dans $\mathbb{R}$. Le discriminant de (X^2+X-1) est positif.

3 . $(1,5+1,5+1+4\times 0,5)$

1. Dans $\mathbb{R}[X]$ on a la factorisation $P=(X+1)^2(X-1)\left(X^2-X+1\right)$. Comme $\Delta=(-1)^2-4=-3<0$, le polynôme X^2-X+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Mais, dans $\mathbb{C}[X]$ on a la factorisation
$$X^2-X+1=-1/4\left(-2X+1+\sqrt{-3}\right)\left(2X-1+\sqrt{-3}\right).$$
2. $$\frac{X+1}{P}=\frac{1/2}{X-1}+\frac{1/3(-X-1)}{X^2-X+1}-\frac{1/6}{X+1}.$$

4 . (1+1,5+3,5)

1. Oui. Pour tout $a,b,c\in\mathbb{R}$ avec $a\neq 0$, les polynômes $P=aX^3+bX^2+cX+1$ satisfisons $P(0)=1$.
2. Soit $P=aX^3+bX^2+cX+d$ avec $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ avec $a\neq 0$. Alors $P(X+1)=a(X+1)^3+b(X+1)^2+c(X+1)+d$. On a donc $P(X+1)-P(X)=3aX^2+(3a+2b)X+\ldots$. C'est un polynôme de degré deux car $a\neq 0$.
3. D'après 1., on pose $P=aX^3+bX^2+cX+1$. Alors $P'(X)=3aX^2+2bX+c$. En dérivant par rapport X les deux membres de l'équation $P(X+1)-P(X)=X^2-1$ on obtient
$$P'(X+1)-P'(X)=6aX+(3a+2b)=2X.$$

On en déduit $a = 1/3$ et $b = -1/2$. De plus, en posant $X = 0$ dans l'équation on trouve $a + b + c = -1$, d'où $c = -5/6$. Le polynôme cherché est donc

$$P = \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{2}X^2 - \frac{5}{6}X + 1.$$