5. Suite : applications linéaires et matrices.

Exercice 5.1. Soient S, T deux matrices définies par

$$S := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer S^2, T^2, ST, TS, STS et TST. Calculer le rang de ces matrices.

Exercice 5.2. Soit $f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par

$$A \mapsto A + {}^tA.$$

1. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.
2. Montrer que $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 5.3. Soient A et B deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ satisfaisant $AB = BA$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k.$$

2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, où A est la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.4. Montrer que la matrice carrée A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

est inversible en calculant explicitement son inverse.

Exercice 5.5. Soit A la matrice carrée (réelle) définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 5.6. Soit $A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que A est inversible en calculant son inverse A^{-1}.

b) En déduire la valeur de A^n pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 5.7. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, puis A^3, puis A^n pour tout entier $n \geq 1$. Calculer l'inverse B de A, puis toutes les puissances B^n pour $n \geq 1$.

Exercice 5.8. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, matrices à coefficients réels. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 3, et soit (e_1, e_2, e_3) et (e'_1, e'_2, e'_3) deux bases de E ; soit F un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 1 et f_1 un vecteur non nul de F. On suppose que la matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (e'_1, e'_2, e'_3) est la matrice P.

a) Calculer la matrice P^{-1}.

b) Soit u l'application linéaire de E vers F dont la matrice est A dans les bases (e_1, e_2, e_3) et (f_1). Déterminer la matrice de u dans les bases (e'_1, e'_2, e'_3) et $(5f_1)$.

Exercice 5.9. Soit E un espace vectoriel, et $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On pose $f_1 = e_1 + 2e_2 - 2e_3$, $f_2 = 4e_1 + 7e_2 - 6e_3$, $f_3 = -3e_1 - 5e_2 + 5e_3$.

a) Vérifier que $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E, et écrire la matrice de passage de la base $\underline{e}$ à la base $\underline{f}$.

b) Soit v de matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans $\underline{f}$. Quelle est sa matrice dans $\underline{e}$?

c) Soit v de matrice $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ dans $\underline{e}$. Quelle est sa matrice dans $\underline{f}$?

d) Pour v vecteur de E, on notera $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sa matrice dans $\underline{e}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sa matrice dans $\underline{f}$. Exprimer x', y' et z' en fonction de x, y et z.

Exercice 5.10. Soit E un espace vectoriel, et $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit u l'endomorphisme dont la matrice dans $\underline{e}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose $f_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $f_2 = e_2 - e_3$ et $f_3 = e_1 - e_3$.

a) Montrer que $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E.

b) Calculer la matrice de u dans $\underline{f}$.

c) Calculer A^{100}.