2. Polynômes

Divisibilité

Exercice 2.1 Pour chacun des polynômes suivants, dresser la liste complète des polynômes le divisant dans l'anneau de polynômes précisé :

1) $X+1$ dans $\mathbb{R}[X]$	2) X^2-1 dans $\mathbb{R}[X]$	3) X^2+1 dans $\mathbb{C}[X]$
4) X^2+1 dans $\mathbb{R}[X]$	5) $2X+4$ dans $\mathbb{Q}[X]$	6) $2X+4$ dans $\mathbb{Z}[X]$

Exercice 2.2 Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note R le reste de la division euclidienne de P par $X-7$. Montrer que $R = P(7)$.

Exercice 2.3 Effectuer les divisions euclidiennes dans $\mathbb{Q}[X]$

1. $3X^5+4X^2+1$ par X^2+2X+3 ;
2. $3X^5+2X^4-X^2+1$ par X^3+X+2 ;
3. X^4-X^3+X-2 par X^2-2X+4.

Exercice 2.4 Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^{5n} par X^5-1.
2. En déduire le reste de la division euclidienne de $X^{99}+2X^{42}-3X^{35}-2X^{27}+3$ par X^5-1.

PGCD, PPCM, algorithme d'Euclide

Exercice 2.5 À l'aide de l'algorithme d'Euclide déterminer le PGCD dans $\mathbb{R}[X]$ des polynômes

$$A = X^4+2X^3-X-2 \quad \text{et} \quad B = X^5-5X^3-9X^2-8X-3$$

et en déduire des polynômes U et V tels que

$$AU+BV = \mathrm{PGCD}(A,B).$$

Racines

Exercice 2.6 Montrer que le polynôme $X^{163}+24X^{57}-6$ a au moins une racine sur $\mathbb{R}$. A-t-il des racines dans $\mathbb{Q}$? Même exercice avec le polynôme X^7+3X^2+2.

Facteurs irréductibles et leurs usages

Exercice 2.7 Factoriser en produit de facteurs irréductibles les polynômes suivants

1. X^4-16 dans $\mathbb{C}[X]$;
2. X^4-16 dans $\mathbb{R}[X]$;
3. $X^{11}+2^{11}$, dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$;
4. X^4+j dans $\mathbb{C}[X]$ où $j := e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Exercice 2.8

1. Est-ce que 1 est racine du polynôme réel $P = X^3 + X^2 + X + 1$? Qu'en est-il de -1 ? Trouver toutes les racines de P sur le corps $\mathbb{C}$.
2. Soit n un entier non nul. Quelles sont les racines du polynôme $1 + X + \cdots + X^n$ sur $\mathbb{C}$?
3. Décomposer $X^6 + 1$ en un produit de facteurs du premier degré dans $\mathbb{C}[X]$. Que peut-on faire dans $\mathbb{R}[X]$? dans $\mathbb{Q}[X]$?

Exercice 2.9 Calculer le PGCD de $P = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ et $Q = X^4 - 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Racines multiples

Exercice 2.10 Soit P le polynôme réel : $P = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + \alpha X^2 + 4X + 1$. On suppose que -1 est une racine de P.

1. Déterminer α.
2. Montrer que -1 est une racine double de P.
3. Montrer que j est une racine multiple de P.
4. Factoriser P, d'abord dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2.11 Pour tout complexe a, on pose $P_a = 2X^3 + 3X^2 + 6X + a \in \mathbb{C}[X]$.

1. Calculer un PGCD de P_a et P'_a.
2. Pour quelles valeurs de a le polynôme P_a admet-il une racine double ? Pour chacune de ces valeurs, décomposer P_a en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Relations entre racines et coefficients

Exercice 2.12 Soit $P = X^3 + 3X^2 + 2X + i \in \mathbb{C}[X]$.

1. Prouver que P n'a pas de racine réelle.
2. Soient α, β et γ les trois racines complexes de P. Calculer $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ et $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$.

Exercice 2.13 Soient α, β et γ les racines complexes du polynôme $P = X^3 + 3X^2 + X + 1$.

1. Écrire les relations reliant les racines et les coefficients de P.
2. Quelle est la valeur de $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + 3\alpha\beta$?

Fractions rationnelles

Exercice 2.14 Donner la forme de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ des fractions rationnelles suivantes et les décomposer.

$$\frac{1}{(X+1)(X-2)}, \quad \frac{X^5-X^3+X+1}{(X+1)(X-2)}, \quad \frac{2X}{X^2+X+1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-X-X^2}.$$

Exercice 2.15 Décomposer en éléments simples, sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$, les fractions rationnelles suivantes

$$\frac{X^5}{(X^4-1)^2} \quad \text{et} \quad \frac{X^4}{X^4+X^3+X^2+X+1}.$$

Exercice 2.16 Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}[X]$ la fraction suivante

$$F = \frac{1}{(X^2+1)^2 - X^2}.$$

Indication. Noter que F est paire, i.e., $F(X) = F(-X)$.

Exercice 2.17 On rappelle que si $\mathbb{K}$ est un corps commutatif, si $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B(0) \neq 0$ et si $m \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tel que

$$A = BQ + X^{m+1}R; \quad \text{et} \quad \deg Q \leq m$$

Illustrer avec

a) $A = 1 - X$, $B = 1 + X^2$, $m = 4$;

b) $A = 1 + iX - X^2 + iX^3$, $B = 1 - iX$, $m = 3$.

Exercice 2.18 Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction suivante

$$F = \frac{X^3 - 4X^2 + 1}{(X+2)^3(X+1)}.$$