1. Arithmétique élémentaire

Exercice 1.1

1. Déterminer tous les diviseurs de 18 dans $\mathbb{Z}$.
2. Déterminer tous les diviseurs de 24 dans $\mathbb{Z}$.
3. Quel est le PGCD de 18 et 24 ?

PPCM. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tous deux non nuls. On appelle $\mathrm{PPCM}(a, b)$ le plus petit nombre m positif qui est un multiple commun de a et b.

Exercice 1.2

1. Décomposer 198 et 195 en facteurs premiers.
2. Quel est le PGCD de 198 et 195 ?
3. Quel est le PPCM de 198 et 195 ?

Exercice 1.3

1. Décomposer 8160 en facteurs premiers.
2. Trouver tous les entiers positifs a, b tels que $a \geq b$, $\mathrm{PGCD}(a, b) = 5$ et $\mathrm{PPCM}(a, b) = 8160$.

Identité de Bézout. Pour deux entiers a et b non tous deux nuls, il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = \mathrm{PGCD}(a, b)$.

Exercice 1.4 En utilisant l'algorithme d'Euclide, calculer le PGCD de 437 et 263, puis trouver deux entiers u et v tel que

$$437u + 263v = \mathrm{PGCD}(437, 263).$$

Exercice 1.5 Calculer le PGCD de 637 et 595.

1. Existe-il des entiers x et y tels que $637x + 595y = 91$? Si oui, trouver tous les entiers x et y tels que $637x + 595y = 91$.
2. Existe-il des entiers x et y tels que $637x + 595y = 143$? Si oui, trouver tous les entiers x et y tels que $637x + 595y = 143$.

Exercice 1.6 Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $7 | (3^{2n} - 2^n)$.

Exercice 1.7

1. Montrer qu'un entier impair a tous ses diviseurs impairs.
2. Soit n un entier, $n \geq 2$. On suppose que si un entier d divise n et $d \geq 2$ alors d est pair. Montrer que n est une puissance de 2.

Exercice 1.8 Soit p un nombre premier. Montrer que si k est un entier tel que $0 < k < p$, alors p divise le coefficient binomial $\mathcal{C}_p^k = \binom{p}{k}$.