# Sujet 6. Lemme du quadrilatère.

Votre réponse doit être envoyée au plus tard le jeudi 30 mai à 20h par email aux adresses `roblot@math.univ-lyon1.fr` et `biagioli@math.univ-lyon1.fr`. La réponse doit consister en une série de commandes SAGE donnant la réponse aux questions posées. La suite de commandes envoyée doit pouvoir être entrée telle quelle dans le système SAGE sans produire d'erreurs. La réponse doit également comporter de manière indispensable des commentaires expliquant les différentes étapes, les objets définis, les calculs effectués, etc. Une réponse sans commentaire ou avec des commentaires insuffisants sera pénalisée. Une partie de la réponse, notamment pour le dernier exercice, doit être faite à la main. Cette partie doit être jointe à l'email dans un fichier additionnel.

N'oubliez pas de préciser également dans votre email l'identité précise des étudiants qui ont travaillé sur ce sujet et le groupe de TD auquel ils appartiennent.

**Exercice 1.**

Trouver tous les couples $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ vérifiant le système

$$\begin{cases} 2x^2 + (-2y^2 - 12y - 15)x + (-3y^2 - 14y - 7) = 0, \\ (-y - 3)x^2 + (2y^2 + 12y + 8)x + (2y^2 + 14y - 4) = 0. \end{cases}$$

**Exercice 2.**

Soit $ABCD$ un quadrilatère non plat du plan. On note $L$, $M$, $N$ et $P$ les milieux respectifs des segments $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, D]$ et $[D, A]$.

Montrer que $LMNP$ est un parallélogramme.

**Exercice 3.**

1. Soient $f_1$ et $f_2$ deux polynômes dans $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.
   Montrer que $V(f_1, f_2) = V(f_1) \cap V(f_2)$.
2. Soient $f_1 = x^2 + z^2 - 1$ et $f_2 = x^2 + y^2 + (z - 1)^2 - 4$ dans $\mathbb{R}[x, y, z]$.
   Tracer les variétés $V(f_1)$ et $V(f_2)$.
   Quelles formes géométriques ont $V(f_1)$ et $V(f_2)$ ?
3. Vérifier graphiquement que l'intersection de $V(f_1)$ et $V(f_2)$ est formée de deux ellipses.
4. Soit $f = x^2 + \frac{1}{2}y^2 z - z - 1$. Montrer que $f$ appartient à l'idéal $(f_1, f_2)$.
   Qu'est-ce que cela implique sur $V(f)$ et $V(f_1, f_2)$ ?
   Vérifier le résultat graphiquement.

<u>Aide SAGE.</u>

Les commandes données dans l'exemple suivant de SAGE permettent de calculer les racines d'un polynôme en *une seule* variable construit à partir de polynômes à plusieurs variables :

```
sage: R.<x,y> = PolynomialRing(QQ, 'x,y')
sage: f1 = x^2-y-7
sage: f2 = x^3+y-5
sage: g = f1 + f2
sage: print(g)
x^3 + x^2 - 12
sage: g.univariate_polynomial().roots()
[(2, 1)]
```

Dans cet exemple, 2 est racine simple de $g$ et c'est l'unique racine de $g$ dans $\mathbb{Q}$.

Soit $f \in \mathbb{C}[x, y, z]$, la commande suivante

```
gf = implicit_plot3d(f, (x,-1,1), (y,-1,1), (z,-1,1), plot_points=100, \
                                    smooth=True, adaptive=True, color="blue")
```

permet d'initialiser le graphe de la variété $V(f)$ pour $-1 \leq x, y, z \leq 1$. La dernière commande précise la couleur. (On peut bien sûr changer les valeurs et les couleurs suivant les besoins). Pour afficher le graphe, il suffit d'entrer `gf`. Si `gf2` est un autre graphe, on peut afficher les deux graphes simultanément en entrant `gf+gf2`.