Université Claude Bernard Lyon 1 - printemps 2012

Licence Sciences, Technologies, Santé - mention mathématiques

Algèbre appliquée - MAT2054L

Premier contrôle

- vendredi 27 avril, durée 2h -

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.

Exercice 1

On fixe un corps $\mathbb{K}$ et on se place dans $\mathbb{K}[x]$, l'anneau des polynômes d'une seule indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$. Montrer qu'il n'y a qu'un seul ordre monomial sur les monômes de $\mathbb{K}[x]$.

—"—

Exercice 2

Considérons la relation d'ordre usuelle $\leqslant$ sur l'ensemble des nombres réels. Le graphe de cette relation est le sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{G} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant y \} .$$

1. Montrer que $\mathcal{G}$ est la projection d'un sous-ensemble algébrique affine de $\mathbb{R}^3$ de la forme $V(f)$ avec $f \in \mathbb{R}[x, y, z]$; en d'autres termes, montrer que $(x, y) \in \mathcal{G}$ si, et seulement si, il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $(x, y, z) \in V(f)$, où f est un polynôme de $\mathbb{R}[x, y, z]$ à expliciter.
(*Indication :* $x \leqslant y$ *si, et seulement si,* $y - x$ *est réel positif*)

2. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme f de $\mathbb{C}[x, y, z]$ permettant de définir une relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{C}$, telle que

$$x \leqslant y \text{ si, et seulement si, il existe } z \in \mathbb{C} \text{ tel que } f(x, y, z) = 0 .$$

(*Indication : Vous pouvez utiliser le théorème de D'Alembert-Gauss*)

3. *(Bonus)* Tracer $V(f)$ pour le polynôme f de la question **1**.

—"—

EXERCICE 3

Dans l'anneau $\mathbb{R}[u, v, x, y]$, muni de l'ordre lexicographique induit par l'ordre alphabétique $u > v > x > y$, on considère l'idéal I engendré par les polynômes f_1 et f_2, définis par

$$\begin{aligned} f_1 &= uy - vx - v, \\ f_2 &= uy - vx + 2v - y. \end{aligned}$$

1. Montrer que la famille $\{f_1, f_2\}$ ne forme pas une base de Gröbner de I.

2. Calculer une base de Gröbner de l'idéal I.

3. Le polynôme $f = 3uvy^2 + uxy - 3v^2xy - vx^2$ appartient-il à l'idéal I ?

—"—

EXERCICE 4

Soit $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ un idéal de $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Rappelons que le k - ième idéal d'élimination I_k est l'idéal de $\mathbb{K}[x_{k+1}, \ldots, x_n]$ défini par

$$I_k = I \cap \mathbb{K}[x_{k+1}, \ldots, x_n].$$

Soit G une base de Gröbner de l'idéal I, pour l'ordre lexicographique induit par l'ordre alphabétique donné par $x_n < \ldots < x_2 < x_1$ et soit $k \in \{0, \ldots, n\}$.

1. Montrer que l'ensemble

$$G_k = G \cap \mathbb{K}[x_{k+1}, \ldots, x_n]$$

est une base de Gröbner de l'idéal I_k.

Soit $I = \langle f_1, f_2 \rangle$ l'idéal de $\mathbb{R}[x, y]$ engendré par les polynômes

$$\begin{aligned} f_1 &= x^2 + 2y^2 - 1, \\ f_2 &= x^2 + xy + y^2 - 1. \end{aligned}$$

2. Déterminer une famille de générateurs de l'idéal $I \cap \mathbb{R}[x]$.

3. Déterminer une famille de générateurs de l'idéal $I \cap \mathbb{R}[y]$.

4. Déterminer les solutions du système d'équations suivant

$$\left| \begin{aligned} f_1(x, y) &= 0, \\ f_2(x, y) &= 0. \end{aligned} \right.$$