

problème revient alors à chercher les solutions du système d'équations polynomiales :

$$\left| \begin{array}{l} f(c_1, \dots, c_n, s_1, \dots, s_n, l_1, \dots, l_n) = a \\ g(c_1, \dots, c_n, s_1, \dots, s_n, l_1, \dots, l_n) = b \\ c_1^2 + s_1^2 = 1, \\ \vdots \\ c_n^2 + s_n^2 = 1. \end{array} \right.$$

On calcule pour cela une base de Gröbner du système relativement à l'ordre lexicographique induit par l'ordre alphabétique suivant :

$$s_1 < c_1 < \dots < s_n < c_n.$$

Les réels  $a, b, l_1, \dots, l_n$  sont des paramètres du système, on calcule la base de Gröbner dans l'anneau  $\mathbb{R}(a, b, l_1, \dots, l_n)[c_1, \dots, c_n, s_1, \dots, s_n]$ . En pratique, on fixera les  $l_i$  pour calculer les solutions du système.

**IX.4.5. Exemple.**— Reprenons l'exemple IX.4.3. En utilisant les formule trigonométrique

$$\begin{aligned} \cos(\theta_1 + \theta_2) &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 = c_1 c_2 - s_1 s_2, \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1 = s_1 c_2 + s_2 c_1. \end{aligned}$$

On a

$$f = \left[ \begin{array}{l} l_3(c_1 c_2 - s_1 s_2) + l_2 c_1 \\ l_3(s_1 c_2 + s_2 c_1) + l_2 s_1 \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 \end{array} \right]$$

Les configurations possible du robot pour que la main atteigne la position  $(a, b)$  de  $\mathbb{R}^2$  sont données par les solutions du systèmes suivant

$$\left| \begin{array}{l} l_3(c_1 c_2 - s_1 s_2) + l_2 c_1 = a \\ l_3(s_1 c_2 + s_2 c_1) + l_2 s_1 = b \\ c_1^2 + s_1^2 = 1 \\ c_2^2 + s_2^2 = 1 \end{array} \right.$$

**Exercice 12.**—

1. Calculer dans  $\mathbb{Q}(a, b, l_2, l_3)[c_2, s_2, c_1, s_1]$  une base de Gröbner de l'idéal engendré par les équations du système précédent, pour l'ordre lexicographique induit par  $s_1 < c_1 < s_2 < c_2$ .
2. En déduire les solutions  $s_1, s_2, c_1, c_2$  de ce système en fonction des paramètres  $a, b, l_2$  et  $l_3$ .

**Exercice 13.**— Étudier les configurations d'un bras robotisé plan constitué de quatre rotules.

# D'autres applications des bases de Gröbner

## Sommaire

1. Applications de l'élimination .....	127
2. Recherche de points singuliers .....	128
3. Calcul de l'enveloppe d'une famille de courbes .....	131
4. Une application en robotique .....	134

Cette dernière partie porte sur l'étude d'applications de la méthode l'élimination. On s'intéressera notamment à deux applications géométriques : la recherche de points singuliers d'une courbe, le calcul de l'enveloppe d'une famille de courbes. Ces deux problèmes fournissent des systèmes d'équations polynomiales que l'on peut résoudre par élimination en utilisant les bases de Gröbner. Enfin, on présente une application originale en robotique.

## § 1 Applications de l'élimination

### IX.1.1. Résolution de systèmes d'équations polynomiales.—

**Exercice 1.**— En utilisant le théorème d'élimination, déterminer les solutions réelles et complexes des systèmes d'équations polynomiales suivants :

$$\left| \begin{array}{l} x^2 + 2y^2 - y - 2z = 0 \\ x^2 - 8y^2 + 10z = 1 \\ x^2 - yz = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0 \\ x^3 - yz - x = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{array} \right.$$

**Exercice 2.** — Résoudre en fonction de  $a$  le système d'équations polynomiales suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y + z = a \\ x + y^2 + z = a \\ x + y + z^2 = a \end{cases}$$

**IX.1.2. La surface d'Enneper.** — La surface d'Enneper est une surface de  $\mathbb{R}^3$  définie par le paramétrage suivant :

$$\begin{cases} x = 3u + 3u^2 - v^3 \\ y = 3v + 3u^2v - v^3 \\ z = 3u^2 - 3v^2 \end{cases}$$

Donner une formulation implicite de de cette surface.

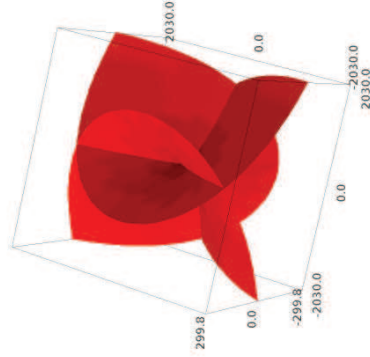
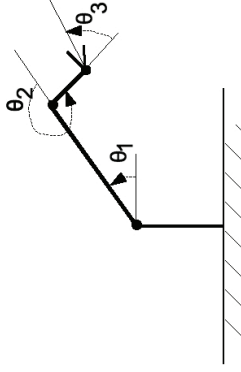


FIGURE IX.1.: Surface d'Enneper.

## § 2 Recherche de points singuliers

**IX.2.1. Points singuliers.** — Soit  $f$  un polynôme de  $\mathbb{K}[x, y]$  et soit  $\mathcal{C} = \mathbf{V}(f)$  la courbe de  $\mathbb{K}^2$  définie par  $f$ , i.e.,  $\mathcal{C}$  est formée de l'ensemble des points  $(x, y)$  de  $\mathbb{K}^2$  vérifiant

$$f(x, y) = 0.$$



On a

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ici l'origine de  $\beta_2 = (x_2, y_2)$  est placée au premier joint. On a

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & l_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & l_3 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Soit

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & -\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) & l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \sin(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Les coordonnées  $(x_4, y_4)$  de la main sont  $(0, 0)$  dans le système de coordonnées du dernier joint, on a donc

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_3 \cos(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \cos(\theta_1) \\ l_3 \sin(\theta_1 + \theta_2) + l_2 \sin(\theta_1) \\ 1 \end{bmatrix}$$

**IX.4.4. Problème cinématique inverse (cas planaire).** — Étant donné une position  $(a, b)$  de  $\mathbb{R}^2$  et une orientation, on souhaite déterminer s'il est possible ou non de placer la main du robot à cette position et dans cette orientation. On peut procéder de la façon suivante.

Posons  $c_i = \cos(\theta_i)$  et  $s_i = \sin(\theta_i)$ . On a la condition  $c_i^2 + s_i^2 = 1$ . On peut alors écrire l'image de  $f : J \rightarrow C$  comme une fonction polynomiale

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix},$$

où  $f_1$  et  $f_2$  sont des polynômes en  $c_i$  et  $s_i$ , et  $f_3$  un polynôme en  $\theta_i$ , pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Le

- l'axe positif des  $x_{i+1}$  est situé dans le prolongement du segment  $i+1$ ,
- l'axe des  $y_{i+1}$  est normal à l'axe des  $x_{i+1}$ .

Ainsi, pour tout  $i \geq 2$ , les coordonnées  $(x_i, y_i)$  du joint  $i$  sont  $(l_i, 0)$ , où  $l_i$  est la longueur du segment  $i$ .

On veut écrire le système de coordonnées  $\beta_{i+1}$  en fonction de  $\beta_i$ . Notons  $\theta_i$  l'angle entre les axes  $x_i$  et  $x_{i+1}$  (mesuré dans le sens trigonométrique usuel). Soit  $q$  un point de  $\mathbb{R}^2$ , on note

$$[q]_{\beta_{i+1}} = \begin{bmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \end{bmatrix}, \quad [q]_{\beta_i} = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix}$$

ses coordonnées dans les systèmes  $\beta_{i+1}$  et  $\beta_i$  respectivement. On a

$$\begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_i \\ 0 \end{bmatrix}.$$

En utilisant une représentation affine du plan dans  $\mathbb{R}^3$ , on a

$$\begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & l_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

En posant

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i & l_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

on a ainsi

$$\begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_i \begin{bmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pour un robot formé de  $k$  rotules, on aura

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_k \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ 1 \end{bmatrix},$$

où  $\beta_1 = (x_1, y_1)$  est le système de coordonnées initial.

Comme la main est attachée au dernier joint, on obtient les coordonnées de la main dans le système  $\beta_1$  en posant  $x_k = y_k = 0$ , d'où

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \dots \mathbf{A}_k \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**IX.4.3. Exemple.**— On considère un bras avec trois rotules :

Rappelons que le gradient de la fonction  $f$  est le vecteur défini par

$$\text{grad}(f) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Un point  $(a, b)$  de  $\mathcal{C}$  est dit *singulier* si  $\text{grad}(f)(a, b) = 0$ . Sinon, lorsque  $\text{grad}(f)(a, b)$  est non nul, on dit que le point  $(a, b)$  est *régulier*.

**IX.2.2. Tangente à une courbe.**— Étant donné un point  $(a, b)$  de la courbe  $\mathcal{C}$ , une droite  $D$  passant par  $(a, b)$  est définie paramétriquement par

$$\begin{cases} x = a + ct \\ y = b + dt \end{cases}$$

La droite passe par le point  $(a, b)$  pour  $t = 0$  et le vecteur  $(c, d)$  est parallèle à la droite  $D$ . L'ensemble des droites passant par  $(a, b)$  est obtenu en faisant varier le vecteur  $(c, d)$ . Posons

$$g(t) = f(a + ct, b + dt).$$

Comme  $(a, b) \in \mathcal{C}$ , 0 est une racine du polynôme  $g$ . On a

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(a + ct, b + dt).c + \frac{\partial f}{\partial y}(a + ct, b + dt).d.$$

d'où

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b).c + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).d.$$

Si  $\text{grad}(f)(a, b) = 0$ , alors  $g'(0) = 0$ . Si  $\text{grad}(f)(a, b)$  est non nul, on a alors  $g'(0) = 0$  si, et seulement si,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b).c + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).d = 0.$$

Lorsque  $(a, b)$  est un point régulier de  $\mathcal{C}$ , la courbe  $\mathcal{C}$  admet une tangente en  $(a, b)$  ; c'est la droite affine passant par  $(a, b)$  et dirigée par le vecteur  $(c, d)$ , orthogonal au vecteur  $\text{grad}(f)(a, b)$ .

**IX.2.3. Calcul des points singuliers.**— Un point singulier  $(a, b)$  de  $\mathcal{C}$  vérifie

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0,$$

de plus, comme  $c$  est une point de la courbe, on a

$$f(a, b) = 0.$$

Les points singuliers de  $\mathcal{C}$  sont ainsi les solutions du système d'équations polynomiales

$$\begin{cases} f = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

**IX.2.4. Exemple.**— Considérons la cubique cuspidale  $\mathcal{C} = \mathbf{V}(y^2 - x^3)$

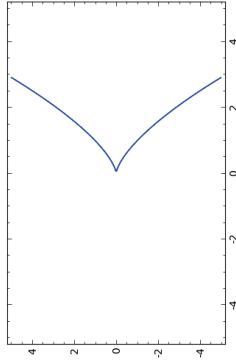


FIGURE IX.2.: Cubique cuspidale  $y^2 = x^3$ .

Les points singuliers de  $\mathcal{C}$  sont les solutions du système :

$$\begin{cases} y^2 - x^3 = 0 \\ -3x^2 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

Il est immédiat que la courbe  $\mathcal{C}$  n'admet qu'un seul point singulier, le point  $(0, 0)$ .

**Exercice 3.** —

1. Tracer la courbe de  $\mathbb{R}^2$  définie par l'équation

$$y^2 = x^2(1+x).$$

2. Déterminer l'ensemble de ses points singuliers.

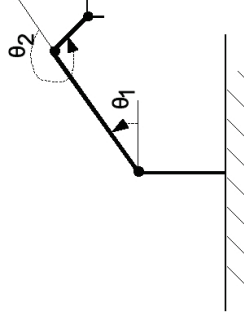
**Exercice 4.** —

1. On considère la courbe de  $\mathbb{R}^2$  définie par

$$y^2 = cx^2 - x^3,$$

où  $c$  est une constante réelle. Faire un tracé de cette courbe pour  $c = 2$ . Déterminer l'ensemble des points singuliers de cette courbe.

— les *rotules* qui permettent de faire une rotation d'un segment relativement à un autre (dans le cas planaire, on suppose que les mouvements se déroulent dans un même plan). La rotation entre deux segments est repérée par son angle  $\theta$ , ainsi l'ensemble des positions d'une rotule est paramétré par  $S^1$  ;



— les *joints prismatiques* qui permettent de réaliser une translation à partir d'un segment via un bras télescopique. La position d'un tel joint est paramétrée par un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

L'ensemble des positions des joints d'un bras composé de  $r$  rotules et de  $p$  joints prismatiques est paramétré par

$$J = S^1 \times \dots \times S^1 \times I_1 \times \dots \times I_p,$$

avec  $r$  produits  $S^1$  et où  $I_k$  est l'ensemble des positions du  $k$ -ème joint prismatique. L'ensemble  $J$  est appelé l'*espace des joints* du robot.

On repère la main du robot, à un instant donné, par un point  $(x_1, x_2)$  de  $\mathbb{R}^2$ . Ainsi l'ensemble des positions de la main du robot décrit une partie  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ . À chaque point de  $U$ , on peut associer un vecteur unité  $u$  décrivant l'orientation de la main. En notant  $V$  l'ensemble des vecteurs unités associés à l'orientation de la main, le produit cartésien  $C = U \times V$  est appelé l'*espace de configuration* de la main du robot. Ainsi, on peut déterminer toutes les positions de la main du robot à l'aide d'une application

$$f : J \longrightarrow C$$

reliant la position de la main avec celle de l'ensemble des joints.

On peut alors formuler deux problèmes classiques en robotique :

- **problème du mouvement avant** : peut-on donner une description explicite de  $f$  ?
- **problème cinématique inverse** : si  $c \in C$ , peut-on décrire  $f^{-1}(c)$  ?

**IX.4.2. Le problème du mouvement avant (cas planaire).**— On considère que le premier segment du bras du robot est fixé à un socle. Soit  $(x_1, y_1)$  les coordonnées du premier joint du bras. On associe au joint  $i$  un système de coordonnées  $\beta_{i+1} = (x_{i+1}, y_{i+1})$  — dont l'origine est placée au joint  $i$ ,

1.  $(x-t)^2 + y^2 = \frac{1}{2}t^2, t \in \mathbb{R}$ ,
2.  $(x-t)^2 + (y-t)^2 = t^2, t \in \mathbb{R}$ .

**IX.3.5. Remarque.**— Notre définition sur les enveloppes reste bien intuitive. En effet, considérons la famille  $\mathcal{C}$  composée des cercles de rayon 1 et dont le centre se trouve sur l'axe des abscisses  $x$ .

**Exercice 10.** — Déterminer l'enveloppe de la famille  $\mathcal{C}$ .

**Exercice 11.** —

1. Déterminer l'enveloppe de la famille de courbes définie par l'équation

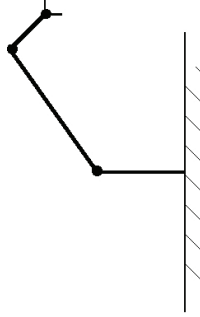
$$(x-t^3)^2 + y^2 = 1.$$

2. Tracer cette enveloppe et comparer avec le résultat de l'exercice précédent.

## § 4 Une application en robotique

L'objectif est d'étudier les configurations géométriques d'un bras robotisé. Pour cette étude, nous allons faire quelques hypothèses simplificatrices sur les éléments constitutifs du bras. Même en considérant une version idéalisée, il est possible de présenter cette problématique importante en robotique.

On s'intéresse au problème de la réalisation des mouvements et de la description de l'espace des mouvements possibles d'un bras robotisé de la forme



**IX.4.1. Modélisation géométrique d'un robot.**— On considère des robots planaires, dont l'évolution est dans le plan, ou spatiaux, dont l'évolution est dans l'espace. Les bras robotisés que nous considérons possèdent deux extrémités :

- la première est fixée au socle et supporte le bras du robot ;
- l'autre extrémité est la partie terminale, appelé *main*, qui réalise la tâche du robot : perçage, vissage, peinture, ...

Un robot est ainsi vu comme une réunion de segments et de joints ; on considère des joints de deux types :

2. Montrer que le cercle

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

ne possède pas de point singulier.

**Exercice 5.** — L'astroïde est la courbe de  $\mathbb{R}^2$  d'équation

$$(x^2 + y^2 - 1)^3 + 27x^2y^2 = 0.$$

Faire un tracé de l'astroïde, puis calculer l'ensemble de ses points singuliers.

**Exercice 6.** — Tracer, puis calculer les points singuliers de la *sixtique de Cayley*, d'équation

$$4(x^2 + y^2 - x)^3 = 27(x^2 + y^2)^2.$$

## § 3 Calcul de l'enveloppe d'une famille de courbes

**IX.3.1. Famille de courbes.**— Soit  $F$  un polynôme de  $\mathbb{R}[x, y, t]$ . Un réel  $t$  étant fixé, on notera  $\mathbf{V}(F_t)$  l'ensemble algébrique affine de  $\mathbb{R}^2$  défini par les solutions de l'équation

$$F(x, y, t) = 0.$$

On appelle *famille de courbes* engendrée par  $F$  l'ensemble des  $\mathbf{V}(F_t)$ , lorsque  $t$  parcourt  $\mathbb{R}$ .

**IX.3.2. Exemple.**— Soit  $F = (x-t)^2 + (y-t)^2 - 4$ . Pour  $t \in \mathbb{R}$  fixé,  $F$  définit un cercle de  $\mathbb{R}^2$  d'équation

$$(x-t)^2 + (y-t)^2 = 4.$$

Voici un tracé de quelques cercles de cette famille :

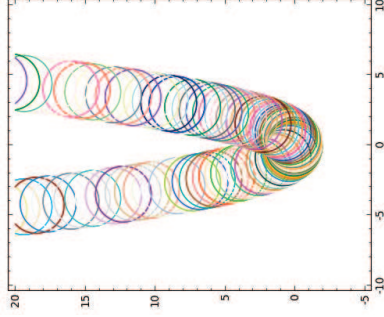


FIGURE IX.3.: Famille de cercles.

**Exercice 7.** — On considère la parabole de  $\mathbb{R}^2$  défini par

$$(x-t)^2 - y + t = 0,$$

où  $t$  est un paramètre réel. Tracer une famille de telles paraboles.

**IX.3.3. Enveloppe de courbes.** — Soit  $\mathbf{V}(F_t)$  une famille de courbes dans  $\mathbb{R}^2$ . L'enveloppe de la famille  $\mathbf{V}(F_t)$  peut se décrire intuitivement comme la courbe qui est tangente à toutes les courbes de la famille. La discussion sur cette notion géométrique dépasse le cadre de ce cours. Formellement, on définira l'enveloppe de la famille  $\mathbf{V}(F_t)$  comme l'ensemble des points  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  vérifiant, pour tout réel  $t$ , les équations suivantes

$$\begin{cases} F(x, y, t) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0 \end{cases}$$

**IX.3.4. Exemple.** — Reprenons l'exemple IX.3.2. Si  $F = (x-t)^2 + (y-t^2)^2 - 4$ , l'enveloppe de la famille  $\mathbf{V}(F_t)$  est définie par les équations

$$\begin{cases} (x-t)^2 + (y-t^2)^2 - 4 = 0 \\ 4t^3 - 4ty + 2t - 2x = 0 \end{cases}$$

On calcule une base de Gröbner de l'idéal  $I = \left\langle F, \frac{\partial F}{\partial t} \right\rangle$ , avec l'ordre lexicographique induit par  $y < x < t$ . On obtient  $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}$ , avec

$$\begin{aligned} g_1 &= t^2 + \frac{32}{135}txy^2 + \frac{8}{27}txy + \frac{26}{135}tx - \frac{16}{135}x^4 - \frac{16}{135}x^2y^2 + \frac{8}{135}x^2y + \frac{37}{45}x^2 \\ &\quad - \frac{16}{135}y^3 + \frac{32}{135}y^2 + \frac{64}{135}y - \frac{128}{135} \\ g_2 &= tx^2 - \frac{2}{9}ty^3 + \frac{7}{6}ty^2 - \frac{3}{8}ty - \frac{697}{288}t - \frac{1}{9}x^5 - \frac{1}{9}x^3y^2 + \frac{7}{18}x^3y + \frac{29}{48}x^3 + \frac{1}{3}xy^3 \\ &\quad - \frac{1}{9}xy^2 - \frac{161}{144}xy - \frac{23}{288}x \\ g_3 &= txy^3 + \frac{3}{4}txy^2 + \frac{3}{16}txy - \frac{431}{64}tx - \frac{1}{2}x^4y + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2y^3 + \frac{107}{32}x^2y^2 + \frac{107}{32}x^2y \\ &\quad + \frac{159}{64}x^2 - \frac{1}{2}y^4 + \frac{5}{4}y^3 + \frac{183}{32}y^2 - 5y - \frac{119}{8} \\ g_4 &= ty^4 - \frac{7}{2}ty^3 - 3ty^2 - \frac{241}{32}ty + \frac{7327}{256}t + \frac{1}{2}x^5y + \frac{7}{8}x^5 + \frac{1}{2}x^3y^3 - \frac{7}{8}x^3y^2 - \frac{185}{32}x^3y \\ &\quad - \frac{1473}{2}x^3 - \frac{3}{2}xy^4 - \frac{17}{8}xy^3 - \frac{99}{32}xy^2 + \frac{1461}{128}xy + \frac{6929}{256}x \\ g_5 &= x^6 + x^4y^2 - \frac{5}{2}x^4y - \frac{191}{16}x^4 - 2x^2y^3 - 6x^2y^2 + \frac{15}{8}x^2y + 43x^2 + y^4 - \frac{17}{2}y^3 + 34y - \frac{289}{4}. \end{aligned}$$

D'après le théorème d'élimination, le premier idéal d'élimination  $I \cap \mathbb{R}[x, y]$  est engendré par le polynôme  $g_5$ . Par suite, l'enveloppe est contenue dans l'ensemble algébrique affine  $\mathbf{V}(g_5)$ .

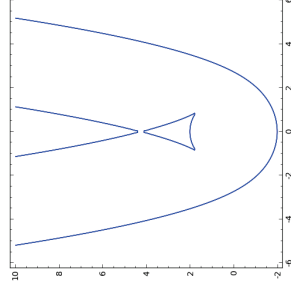


FIGURE IX.4.: Enveloppe de la famille  $(x-t)^2 + (y-t^2)^2 = 4$ .

**Exercice 8.** — Calculer l'enveloppe de la famille de parabole de l'exercice 7.

**Exercice 9.** — Pour les familles de courbes suivantes, faire un tracé de quelques éléments de la famille, calculer l'enveloppe de la famille, puis tracer cette enveloppe.