

---

---

# PROGRAMME TRAITÉ EN COURS DE TECHNIQUES MATHÉMATIQUES DE BASE

---

---

## Cours

Un cours polycopié sera distribué prochainement.

## Ouvrage recommandé

Le livre de F. AYRES et E. MENDELSON : *Analyse*, collection Mini Schaum's, EdiSciences, chez Dunod, Paris, 2002.

## Wiki site

Un site, spécialement dédié à l'unité TMB, a été ouvert dans le portail math-info de Lyon 1. Ce site servira à déposer les notes de cours, les notes d'information et le bulletin indiquant le programme traité en cours. Pour accéder à ce site, qui est hébergé par le portail math-info, vous pouvez :

- Soit utiliser un moteur de recherche pour trouver le portail math-info de Lyon 1, puis L1, puis TMB, puis cliquer sur page de cours ;
- Soit utiliser son adresse

<http://licence-math.univ-lyon1.fr/doku.php?id>

puis L1, puis TMB, puis cliquer sur page de cours.

## Programme traité lors du cours du 14 février 2012

### Nombres complexes

Construction des nombres complexes. Addition et multiplication des nombres complexes. Inverse d'un complexe non nul. Représentation des points du plan par des nombres complexes. Interprétation de la somme de deux nombres complexes. Forme trigonométrique d'un complexe non nul. Formule d'Euler. Interprétation géométrique du produit de deux nombres complexes. Racines carrées d'un nombre complexe. Résolution de l'équation du second degré à coefficients complexes. Cas des équations du second degré à coefficients réels.

## Programme traité lors du cours du 21 février 2012

### Fin des nombres complexes

**1. POLYNÔMES À COEFFICIENTS COMPLEXES :** Racines, théorème de D'Alembert-Gauss, factorisation des polynômes sur le corps des complexes. Les conjugués des racines complexes d'un polynôme à coefficients réels sont encore des racines. Décomposition des polynômes à coefficients réels en polynômes irréductibles sur le corps des réels.

**2. APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DES NOMBRES COMPLEXES.** Produit scalaire et produit mixte de deux vecteurs  $V$  et  $V'$  du plan. Expression du produit scalaire et du produit mixte au moyen des parties réelle et imaginaire de  $\bar{z}z'$ , où  $z$  et  $z'$  sont les nombres complexes associés à  $V$  et  $V'$ . Propriétés élémentaires du produit scalaire, inégalité de Schwarz, expression du cosinus de l'angle de deux vecteurs en fonction des vecteurs, vecteurs orthogonaux, condition d'orthogonalité de deux vecteurs, équation d'une droite passant par un point et orthogonale à un vecteur. Propriétés élémentaire du produit mixte de deux vecteurs, interprétation comme aire algébrique du parallélogramme engendré par ces vecteurs, condition d'indépendance de deux vecteurs, application à la résolution d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

## Programme traité lors du cours du 28 février 2012

### Fonctions d'une variable réelle

**1. GÉNÉRALITÉS :** Notion de fonction. Graphe d'une fonction. Fonctions paires, impaires, périodiques. Exemples de fonctions (fonctions linéaires, affines, polynômes, fractions rationnelles). Rappel du plan d'étude d'une fonction (dérivée, tableau de variation, tangentes, graphe). Application à la détermination du graphe de la fonction  $f(x)=ax^2+bx+c$ . Équation cartésienne d'une parabole donnée par son foyer et sa directrice.

**2. FONCTIONS CIRCULAIRES.** Définition du sinus, du cosinus, de la tangente. Graphes de ces fonctions. Valeurs remarquables des lignes trigonométriques. Formules de trigonométries usuelles (dont sinus, cosinus et tangente des arcs doubles). Calcul de  $\sin a - \sin b$  et de  $\cos a - \cos b$ .

**3. LIMITE D'UNE FONCTION.** Définition. Exemple de calcul d'une limite (limite d'une fraction rationnelle en un pôle qui est une fausse singularité).

## Programme traité lors du cours du 6 mars 2012

### Fonctions d'une variable réelle (suite)

**1. LIMITES :** Notion de forme indéterminée. Calcul de la limite du quotient de  $\sin x$  par  $x$  lorsque  $x$  tend vers zéro. Utilisation de la dérivée pour résoudre d'autres formes indétermi-

nées comme la limite du quotient du logarithme de  $1+x$  par  $x$  lorsque  $x$  tend vers zéro. Énoncé de la règle de l'Hospital et application à la résolution de formes indéterminées.

**2. FONCTIONS CONTINUES** : Définition. Exemples de fonctions non continues. Fonctions dérivables. Démonstration de la continuité des fonctions dérivables. Approximation au premier ordre d'une fonction dérivable en un point par une fonction affine de l'accroissement de la variable.

**3. FONCTION LOGARITHME** : Définition comme primitive de la fonction  $1/x$  qui s'annule au point  $x=1$ . Unicité d'une telle fonction. Interprétation de  $\ln x$  comme aire du sous-graphe de la fonction  $1/x$  sur l'intervalle d'extrémités  $1$  et  $x$ . Étude des variations de la fonction logarithme et graphe de cette fonction. Tangente au graphe au point d'abscisse  $x=1$ , majoration de  $\ln x$  par  $x-1$ . Calcul de la limite du quotient de  $\ln x$  par  $x$  quand  $x$  tend vers l'infini. Calcul de la limite du produit de  $\ln x$  par  $x$  quand  $x$  tend vers zéro. Croissance comparée du logarithme et de la fonction puissance.

## Programme traité lors du cours du 13 mars 2012

### Fonctions d'une variable réelle (suite)

**1. FONCTIONS RÉCIPROQUES** : Réciproque d'une fonction injective. Les fonctions strictement monotones sont injectives. Lorsqu'elles sont continues et définies sur un intervalle, leur réciproque est définie sur l'intervalle image et est continue. Le graphe de la fonction réciproque est le symétrique du graphe de la fonction de départ par rapport à la première bissectrice. Dérivation des fonctions réciproques. Application à la fonction racine carrée (définition comme réciproque de la fonction puissance deux, graphe, dérivée).

**2. EXPONENTIELLE** : Définition comme réciproque de la fonction logarithme. Graphe et dérivée de l'exponentielle. Exponentielle d'une somme. Exponentielle et décroissance radioactive (mise en équation de la fonction nombre d'atomes radioactifs en fonction du temps et résolution complète du problème de la décroissance radioactive). Fonctions puissances. Graphes et dérivées des fonctions puissances. Croissance comparée de l'exponentielle et des fonctions puissance.

**3. FONCTIONS HYPERBOLIQUES** : Définition du sinus, du cosinus et de la tangente hyperboliques. Relations fondamentales de la trigonométrie hyperbolique. Analogies avec les formules de trigonométrie circulaire.

## Programme traité lors du cours du 20 mars 2012

### Fonctions d'une variable réelle (suite)

**1. FONCTIONS HYPERBOLIQUES** : Dérivée et graphe des fonctions hyperboliques. Nouvelle définition des fonctions hyperboliques à partir des points de l'hyperbole  $x^2 - y^2 = 1$ .

**2. FONCTIONS CIRCULAIRES RÉCIPROQUES** : Définition, étude, graphe et dérivée des fonctions Arcsinus, Arccosinus et Arctangente.

**3. DÉRIVÉES** : Fonction dérivable, dérivée. Dérivée des fonctions constantes, des polynômes, de la fonction sinus. Différentielle. Approximation linéaire d'une fonction dérivable au voisinage d'un point.

## Programme traité lors du cours du 27 mars 2012

### Dérivation (suite)

**1. RÈGLES DE CALCUL DES DÉRIVÉES** : Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une fonction composée, de la réciproque d'une fonction (rappel). Illustration sur des exemples de calcul de dérivées. Table des dérivées usuelles.

**2. THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS** : Démonstration du théorème de Rolle, du théorème des accroissements finis. Interprétation géométrique. Une fonction de dérivée nulle sur un intervalle est constante. Si la dérivée d'une fonction est positive (resp. strictement positive), la fonction est croissante (resp. strictement croissante). Théorème de la moyenne.

## Programme traité lors du cours du 3 avril 2012

### Dérivation (suite)

**1. DIFFÉRENTIELLE** : Différentielle d'une application dérivable. Linéarisation d'une fonction dérivable au voisinage d'un point. Interprétation géométrique de la différentielle. Expression différentielle des règles de calcul des dérivées.

**2. APPLICATIONS DU THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS** : Variation des fonctions, méthode d'étude d'une fonction. Calculs de valeurs approchées avec estimation de l'erreur. Usage du théorème des accroissements finis pour établir des inégalités entre fonctions. Extension due à Cauchy du théorème des accroissements finis. Utilisation à la démonstration de la règle de l'Hôpital. Exemples de résolution de formes indéterminées.

**3. EXTREMA DES FONCTIONS** : Condition nécessaire à l'existence d'un extremum local (annulation de la dérivée). La condition n'est pas suffisante. Recherche des extrema des fonctions continues sur un intervalle fermé et borné et dérivables sur l'intérieur. Application à des problèmes d'optimisation : dimensions d'une boîte cylindrique de volume fixé et de surface minimum, théorème de Descartes sur la réfraction des ondes monochromatiques à l'interface de deux milieux optiques.

### Prévu pour le prochain cours

**FORMULE DE TAYLOR**. Formule de Taylor à l'ordre  $n$ . Développement limité et développement des fonctions classiques en série entière.

**PRIMITIVES DES FONCTIONS**. Notion de primitive. Intégrale simple.