TECHNIQUES MATHÉMATIQUES DE BASE

Contrôle continu d'amphithéâtre du 15 mai 2012

Durée de l'épreuve : 1h 30

AVERTISSEMENT. Les calculettes sont interdites. Le contrôle comporte deux exercices indépendants, de niveau équivalent. Ils seront chacun notés sur 20 ; un barème figure à titre indicatif. On attachera du prix à la rédaction.

EXERCICE I

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par : $f(x)=(x+1)\ln((x-2)^2)$.

Question 1 (1 point). Préciser le domaine de définition D de f.

Question 2 (3 points). Montrer que la dérivée de f est donnée, pour $x\in D$, par :

$$f'(x)=\ln((x-2)^2)+\frac{6}{x-2}+2.$$

Question 3 (4 points). Calculer la dérivée seconde de f sur D. En déduire les variations de la dérivée f'.

Question 4 (5 points). Calculer les limites de f' en $-\infty$ et en 2 à gauche. Montrer que f' s'annule en un seul point de l'intervalle $]-\infty,2[$.

Question 5 (4 points). Étudier le signe de f' sur l'intervalle $]2,+\infty[$ et dresser le tableau de variation de f.

Question 6 (3 points). Étudier les limites de f aux bornes de D et représenter le graphe de f dans un repère orthonormé (on précisera les éventuelles asymptotes).

EXERCICE II

Soit f la fonction définie pour $x>0$ par : $f(x)=\sqrt{x}$.

Question 1 (5 points). Calculer la limite de $\left(\frac{f(x+1)}{f(x)}\right)^{2x}$ lorsque $x\to+\infty$.

Question 2 (6 points). Montrer, en utilisant le théorème des accroissements finis, que l'on a pour tout $x>0$:

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}}<f(x+1)-f(x)<\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Question 3 (6 points). Déduire de la question 2 que l'on a pour tout entier $n\geq 1$:

$$2\sqrt{n+1}-2\leq\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}\leq 2\sqrt{n+1}-1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Question 4 (3 points). Calculer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la suite :

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

***