

FORMULAIRE TMB OFFICIEL

Trigonométrie

Relations entre les lignes trigonométriques

$$\sin(-x) = -\sin x ; \cos(-x) = \cos x ; \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) ;$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} ; \cos^2 x + \sin^2 x = 1 ; \cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} ; \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x} .$$

Addition des arcs

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b ; \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a ;$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} ; \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} ;$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} ; \tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p \cdot \cos q} ;$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} .$$

Multiplication des arcs

$$\cos(2a) = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a = \cos^2 a - \sin^2 a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a} ;$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a = \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a} ; \tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a} .$$

Fonctions classiques

Logarithme népérien

La fonction $\ln x$ est l'unique fonction définie pour $x > 0$ qui vérifie $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ et $\ln(1) = 0$.

Elle vérifie les relations : $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, $\ln(x^n) = n \ln x$; $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$.

Exponentielle

La fonction e^x est la réciproque de la fonction $\ln x$: $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$. Elle vérifie

$$(e^x)' = e^x , e^0 = 1 , \text{ ainsi que les relations : } e^{x+y} = e^x e^y ; e^{-x} = \frac{1}{e^x} ; e^{nx} = (e^x)^n .$$

La fonction $x^a = e^{a \ln x}$ généralise la fonction puissance ; la fonction $a^x = e^{x \ln a}$ est une exponentielle de base a .

Fonctions hyperboliques

$$\text{Elles sont définies par : } \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} ; \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} ; \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} .$$

$$\text{FORMULES DE TRIGONOMETRIE HYPERBOLIQUE : } \operatorname{ch}^2 a - \operatorname{sh}^2 a = 1 ; \operatorname{ch}^2 a = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 a} ;$$

$$\operatorname{sh} 2a = 2 \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a ; \operatorname{ch} 2a = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a = 2 \operatorname{ch}^2 a - 1 = 2 \operatorname{sh}^2 a + 1 .$$

Dérivées. Formule et développements de Taylor

Dérivées usuelles

$$(x^a)' = ax^{a-1}; (e^x)' = e^x; (\ln x)' = \frac{1}{x}; (\sin x)' = \cos x; (\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x; (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x; (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x; (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{c h^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x;$$

$$(\operatorname{Arc} \tan x)' = \frac{1}{1+x^2}; (\operatorname{Arc} \sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; (\operatorname{Arc} \cos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Règles de dérivation

DÉRIVÉE DU PRODUIT : Si $F(x) = f(x)g(x)$, alors $F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

DÉRIVÉE DU QUOTIENT : Si $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, alors $F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$.

DÉRIVÉE DE LA COMPOSÉE : Si $F(x) = f(g(x))$, alors $F'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

DÉRIVÉE DE LA RÉCIPROQUE : $y = f(x) \Leftrightarrow x = \varphi(y)$, alors : $f'(x) \times \varphi'(y) = 1$.

Formule des accroissements finis

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Formule de Taylor

Si $f, f', \dots, f^{(n)}$ existent et sont continues sur $[a, b]$ et si $f^{(n+1)}$ existe $]a, b[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que l'on ait :

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \dots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Développements en série

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots; \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots; \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots;$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots; \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots;$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!} x^n + \dots;$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$
