TECHNIQUES MATHÉMATIQUES DE BASE. ÉPREUVE DU 15 MAI 2012

Corrigé succinct

EXERCICE 1

QUESTION 1 - Le domaine de définition de f est $D = \mathbb{R} - \{2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$. $\blacksquare$

QUESTION 2 - $f'(x) = \ln((x-2)^2) + (x+1) \cdot \dfrac{2(x-2)}{(x-2)^2} = \ln((x-2)^2) + 2\dfrac{x+1}{x-2}$

$$= \ln((x-2)^2) + 2\frac{x-2+3}{x-2} = \ln((x-2)^2) + 2 + \frac{6}{x-2} \quad \blacksquare$$

QUESTION 3 : $f''(x) = \dfrac{2(x-2)}{(x-2)^2} - \dfrac{6}{(x-2)^2} = \dfrac{2x-10}{(x-2)^2}$. La dérivée seconde de f s'annule pour $x = 5$. On a : $x \geqq 5 \Rightarrow f''(x) \geqq 0$ et $x \leqq 5 \Rightarrow f''(x) \leqq$
On peut donc dresser le tableau des variations de f' :

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$		$\nearrow$	

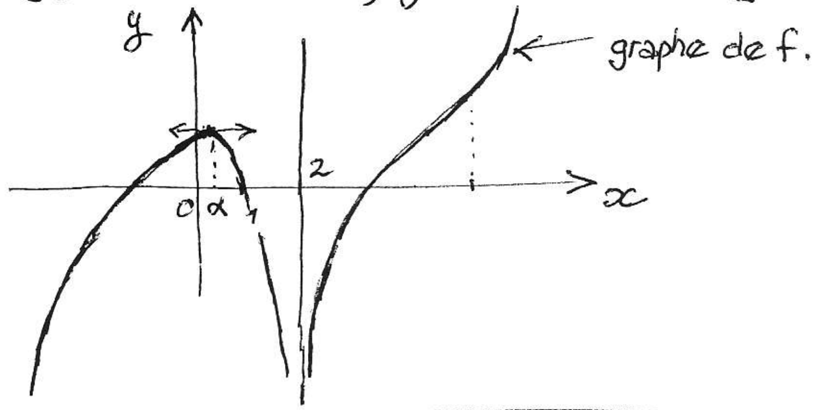
QUESTION 4. On a : $f'(x) = \ln((x-2)^2) + 2 + \dfrac{6}{x-2} \xrightarrow[x \to 2^-]{} -\infty + 2 - \infty = -\infty$.
Par ailleurs, $f'(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty + 2 + 0 = +\infty$. Comme f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 2[$, il existe un unique $\alpha \in]-\infty, 2[$ tel que $f'(\alpha) = 0$. Notons que :
$f'(0) = 2\ln(2) - 1 \approx 0,38 > 0$ et que $f'(1) = -4 < 0$, de sorte que l'on a $0 < \alpha < 1$. $\blacksquare$

QUESTION 5. On a : $f'(5) = 2\ln(3) + 4 > 0$, de sorte que $f'(x) > 0$ pour $x \in]2, +\infty[$ d'après la question 3. Par ailleurs, $f'(x) > 0$ pour $x \in]-\infty, \alpha[$ et $f'(x) < 0$ pour $x \in]\alpha, 2[$. On peut donc dresser le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		0	α	1		2		5	$+\infty$
$f'(x)$		$+$		0	$-$		$\Vert$		$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\ln(4) \approx 1,38$		0	$\searrow$	$\Vert$	$\nearrow$	$6\ln(3^2)$	

Comme $f'(\alpha) = 0$, on a $\ln((\alpha-2)^2) = -2\dfrac{\alpha+1}{\alpha-2}$. Mais alors :
$f(\alpha) = \ln((\alpha-2)^2)(\alpha+1) = -\dfrac{2(\alpha+1)^2}{\alpha-2} > 0$. $\blacksquare$

QUESTION 6. Quand $x \to -\infty$, $x+1 \to -\infty$ et $\ln((x-2)^2) \to +\infty$, de sorte que $f(x) \to -\infty$. Quand $x \to 2$, $x+1 \to 3$ et $\ln((x-2)^2) \to -\infty$, de sorte que $f(x) \to -\infty$. Enfin, quand $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$ et même $\frac{f(x)}{x} \sim \ln((x-2)^2) \to +\infty$. Il y a donc dans ce cas une branche parabolique de direction l'axe Oy. Il y a également une branche parabolique de direction Oy quand $x \to -\infty$. La droite $x=2$ est enfin une asymptote pour le graphe de f, dont le tracé figure ci-dessous. ∎



EXERCICE 2

QUESTION 1. $\left(\frac{f(x+1)}{f(x)}\right)^{2x} = \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}$.

Comme $\ln(1+\frac{1}{x}) \sim \frac{1}{x}$ quand $x \to +\infty$, on a $x\ln(1+\frac{1}{x}) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x+1)}{f(x)}\right)^{2x} = e$. ∎

QUESTION 2. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $\theta \in]x, x+1[$ tel que : $f(x+1)-f(x) = (x+1-x)f'(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{\theta}} \in \left]\frac{1}{2\sqrt{x+1}}, \frac{1}{2\sqrt{x}}\right[$. On en déduit que : $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} < f(x+1)-f(x) < \frac{1}{2\sqrt{x}}$. ∎

QUESTION 3. D'après la question 2, on a :

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$$
$$\frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n}-\sqrt{n-1} < \frac{1}{2\sqrt{n-1}}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{1}{2\sqrt{2}} < \sqrt{2}-\sqrt{1} < \frac{1}{2\sqrt{1}}$$

En additionnant ces relations, il vient :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) < \sqrt{n+1}-1 < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$ d'où l'on déduit :

$$2\sqrt{n+1}-2 < \frac{1}{\sqrt{1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} < 1+2\sqrt{n+1}-2-\frac{1}{\sqrt{n+1}} = 2\sqrt{n+1}-1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$ ∎

QUESTION 4. D'après la question 4, on a :

$$u_n = \frac{2\sqrt{n+1} - 2}{\sqrt{n}} \leqq S_n \leqq \frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = v_n .$$

Comme $U_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2$ et $v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 2 . \blacksquare$$