Chapitre I

LES NOMBRES COMPLEXES

On sait qu'une équation du second degré à coefficients réels dont le discriminant est négatif n'a pas de racines réelles. Ceci est dû au fait que l'équation $x^2+1=0$ n'a pas de solution réelle, puisque le carré de tout nombre réel x est positif ou nul, donc distinct de -1. La possibilité de représenter les solutions de l'équation du second degré par l'intermédiaire d'opérations effectuées sur des nombres imaginaires ont poussé les mathématiciens du XVII^e^ siècle à introduire les nombres complexes. Il s'agit de nombres de la forme $x+iy$ où x,y sont des nombres réels, et i un nombre « imaginaire » assujetti à vérifier la relation $i^2=-1$. L'ensemble des nombres complexes est muni d'une addition et d'une multiplication qui obéissent aux mêmes règles de calcul que l'addition et la multiplication de nombres réels[1].

Le corps des nombres complexes joue un rôle important en mathématiques du fait que tout polynôme à coefficients complexes de degré $n \geq 1$ possède n racines complexes (distinctes ou confondues)[2].

Les nombres complexes ont également un intérêt géométrique. En effet, de même que les points d'une droite s'identifient aux nombres réels (modulo le

[1] Plus précisément, l'ensemble des nombres complexes possède une structure de corps commutatif, comme nous le verrons au § I.
[2] On dit que le corps des complexes est algébriquement clos.

choix d'une unité de longueur), les points d'un plan rapporté à un repère orthonormé s'identifient aux nombres complexes. Le calcul algébrique sur les nombres complexes a ainsi une signification géométrique, qui est à la source de nombreuses applications, notamment en trigonométrie.

I. — Le corps des nombres complexes

1. Introduction. — Pour étendre les nombres réels de manière à inclure toutes les racines des équations du second degré, on cherche à construire un ensemble $\mathbb{C}$ de nombres complexes vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\mathbb{C}$ contient le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$), ainsi qu'une solution « imaginaire » i de l'équation $X^2 + 1 = 0$;

(ii) $\mathbb{C}$ est un corps commutatif, i.e. il est muni d'une addition et d'une multiplication obéissant aux mêmes règles de calcul que celles utilisées pour les nombres réels. On demande en outre que ces opérations coïncident sur $\mathbb{R}$ avec l'addition et la multiplication des nombres réels.

Les nombres complexes doivent ainsi comprendre au minimum un nombre i tel que $i^2 = -1$, le produit iy de i par tout nombre réel y, ainsi que la somme $x + iy$ où x est un nombre réel arbitraire. Considérons l'ensemble des expressions de la forme $x + iy$, où x et y sont réels. Pour de telles expressions, l'égalité $x + iy = x' + iy'$ implique $x = x'$ et $y = y'$. En effet, cette dernière égalité s'écrit encore $(x - x') = -i(y - y')$ et implique, en élevant au carré : $(x - x')^2 = -(y - y')^2$. Puisqu'un nombre à la fois positif et négatif est nul, on en déduit que $x = x'$ et $y = y'$. Il y a ainsi unicité de la représentation des expressions considérées sous la forme $z = x + iy$. L'addition de tels « nombres » est naturellement définie par :

$$(x+iy)+(x'+iy')=(x+x')+i(y+y'),$$

et la relation $i^2=-1$ conduit à la règle de multiplication suivante :

$$\begin{aligned}(x+iy)\times(x'+iy') &= xx'+ixy'+iyx'+i^2yy' \\ &= (xx'-yy')+i(xy'+yx').\end{aligned}$$

Toutes ces considérations conduisent à définir un nombre complexe $z\in\mathbb{C}$ par la donnée d'un couple (x,y) de deux nombres réels tels que $z=x+iy$. Le nombre imaginaire i correspond alors au couple $(0,1)$.

2. **Définition des nombres complexes**. — Mathématiquement, on appelle *nombre complexe* la donnée d'un couple (x,y) de deux nombres réels. On désigne par $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, muni des lois d'addition et de multiplication définies par :

$$\begin{cases}(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y') \\ (x,y)\times(x',y')=(xx'-yy',xy'+yx').\end{cases}$$

On convient d'identifier tout nombre réel x avec le nombre complexe $(x,0)$, et on note $x=(x,0)$. En particulier, $0=(0,0)$ et $1=(1,0)$. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels s'identifie ainsi à une partie de $\mathbb{C}$. On vérifie immédiatement que les lois d'addition et de multiplication des nombres complexes définies ci-dessus coïncident, sur les nombres réels, avec les lois usuelles d'addition et de multiplication. On pose par ailleurs $i=(0,1)$. On a :

$$i^2=(0,1)\times(0,1)=(-1,0)=-1,$$

de sorte que i est bien une racine de l'équation $X^2+1=0$. Enfin on a, quels que soient les réels x et y :

$$\begin{aligned}x+iy &= (x,0)+\left[(0,1)\times(y,0)\right] \\ &= (x,0)+(0,y)=(x,y),\end{aligned}$$

ce qui justifie la notation $x+iy$ pour le nombre complexe $z=(x,y)$. On dit que x et y sont respectivement la *partie réelle* et la *partie imaginaire* de $z=x+iy$, et on note :

$$x=Re(x+iy),\ \ y=Im(x+iy).$$

Les nombres complexes non nuls de partie réelle nulle sont appelés les *imaginaires* purs. Pour tout nombre complexe $z=x+iy$, le nombre $\overline{z}=x-iy$ est appelé le *complexe conjugué* de z. On observera que l'on a :

$$Re(z)=\frac{z+\overline{z}}{2},\quad Im(z)=\frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

3. Règles de calcul. — La possibilité de calculer sur les nombres réels en utilisant les mêmes règles que pour les nombres réels s'exprime mathématiquement de la manière suivante :

THÉORÈME 1. — *L'ensemble des nombres complexes, muni des lois d'addition et de multiplication, est un corps commutatif, i.e. il vérifie les propriétés suivantes :*

(i) Les lois d'addition et de multiplication sont commutatives *:* $z+z'=z'+z$ *et* $zz'=z'z$ *quels que soient* $z,z'\in\mathbb{C}$ *;*

(ii) Les lois d'addition et de multiplication sont associatives :

$$z+(z'+z'')=(z+z')+z'',\quad z(z'z'')=(zz')z''$$

quels que soient $z,z',z''\in\mathbb{C}$ *;*

(iii) La multiplication est distributive par rapport à l'addition *:* $z(z'+z'')=zz'+zz''$ *quels que soient* $z,z',z''\in\mathbb{C}$ *;*

(iv) (Existence d'un zéro). *Le nombre complexe* $0=0+i0$ *vérifie* $z+0=z$ *quel que soit* $z\in\mathbb{C}$ *;*

(v) (Existence d'une unité). *Le nombre complexe* $1=1+i0$ *vérifie* $z1=z$ *quel que soit* $z\in\mathbb{C}$ *;*

(vi) (Existence d'un opposé). *Pour tout nombre*

complexe $z = x + iy$, *le nombre* $-z = -x + i(-y)$ *est l'unique nombre complexe* z' *tel que* $z + z' = 0$ *(on dit que c'est l'opposé de* z*)*;

(vii) (Existence de l'inverse d'un nombre complexe non nul). *Pour tout nombre complexe non nul* $z = x + iy \neq 0$, *il existe un unique nombre complexe* z' *tel que* $zz' = 1$. *Ce nombre* z' *est appelé l'inverse de* z *et noté* $\frac{1}{z}$.

La vérification de ces propriétés est immédiate. Pour calculer l'inverse d'un nombre complexe non nul $z = x + iy$, on écrit en pratique :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$
$$= \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Il résulte aisément des propriétés ci-dessus que le produit de deux nombres complexes est nul si et seulement si l'un de ces nombres est nul.

EXEMPLE. — *Soit à calculer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe* $z = \frac{1+i}{2-i}$.

Solution. — On a $z = \frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{1+3i}{4+1} = \frac{1}{5} + i\frac{3}{5}$, d'où $Re(z) = \frac{1}{5}$, $Im(z) = \frac{3}{5}$. ■

II. — Représentation géométrique des nombres complexes

1. Le plan d'Argand-Cauchy. — On sait que les nombres réels peuvent être représentés par les points d'une droite sur laquelle on a choisi une origine et un vecteur unitaire. Cette représentation permet de disposer d'une vision géométrique de l'addition des nombres réels, basée sur l'addition des longueurs. De même, les nombres complexes peuvent être représentés par les points d'un plan dans lequel on a choisi un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. En effet, tout nombre complexe $z = x + iy$ détermine un unique point M de coordonnées (x,y) dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ par la relation :

$$(1)\ \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

On dit que M est *l'image* du nombre complexe z, ou encore que z est *l'affixe* du point M. Inversement, tout point M du plan détermine un unique nombre complexe $z = x + iy$ par la relation (1). Ceci nous autorise à identifier les points du plan aux nombres complexes. Si Ox et Oy sont les deux axes de coordonnées, les points de l'axe Ox sont les images des nombres réels tandis que les points de l'axe Oy sont les images des nombres imaginaires purs. Comme tout point M du plan est entièrement déterminé par le vecteur $\overrightarrow{OM}$, les nombres complexes s'identifient également au vecteurs du plan[3]. Le nombre i, qui est imaginaire pur, est ainsi défini par le vecteur unitaire de l'axe Oy.

Si M est un point d'affixe z et M' un point d'affixe z', le point M'' tel que

$$\overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$$

a pour affixe la somme $z'' = z + z'$. En effet, si l'on pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, les points M et M' ont pour coordonnées respectives (x,y) et (x',y') dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Le vecteur $\overrightarrow{OM''}$ a donc pour coordonnées $(x + x', y + y')$, de sorte que l'affixe z'' de M'' est égale à :

$$z'' = x + x' + i(y + y') = z + z'.$$

Ainsi, la somme de deux nombres complexes correspond à l'addition des vecteurs qui les représentent. Il s'ensuit que, si A et B sont deux points du plan d'affixes respectives a et b, le vecteur

[3] Le nombre complexe $z = x + iy$ est donc identifié au point M de coordonnées (x,y), ainsi qu'au vecteur $\overrightarrow{OM}$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ est représenté par le nombre complexe $b - a$.

2. Forme trigonométrique. — Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul, et notons M son image dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La longueur OM, que l'on appelle aussi la *norme* $\|\overrightarrow{OM}\|$ du vecteur $\overrightarrow{OM}$, est égale à $\sqrt{x^2 + y^2}$ en vertu du théorème de PYTHAGORE. On dit que cette longueur est le *module* du nombre complexe z et on note :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \; .$$

Observons que l'on a :

(i) $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2$, et

(ii) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ quels que soient $z, z' \in \mathbb{C}$.

Pour établir la relation *(ii)*, considérons les points A et B du plan d'affixes $-z$ et z'. Le vecteur

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

correspond alors au nombre complexe $z + z'$ et la relation *(ii)* se ramène à l'inégalité classique $AB \leq OA + OB$ entre les côtés d'un triangle de sommets O, A, B.

Désignons par θ l'angle (défini à un multiple entier de 2π près) des vecteurs $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM}$. On dit que θ est un *argument* de z ; si on impose à cet argument d'appartenir à l'intervalle $]-\pi, \pi]$, il est déterminé de manière unique et s'appelle l'*argument principal* de z. Soient P et Q les projections orthogonales de M sur les axes Ox et Oy. On a :

$$x = OM \cos\theta, \quad y = OM \sin\theta,$$

de sorte que l'on peut écrire :

$$z = x + iy = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta = |z|(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Convenons avec EULER de poser, pour tout nombre réel u :

$$e^{iu} = \cos u + i \sin u \; .$$

On peut alors écrire z sous la *forme trigonométrique* suivante :

$$z = re^{i\theta} \text{ , où } r = |z| \text{ et } e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta .$$

Cette forme trigonométrique est très utile pour calculer le produit de deux nombres complexes. On a en effet :

THÉORÈME 2. — *Quels que soient les nombres réels θ et θ', on a :*

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'} \text{ (formule d'EULER).}$$

En particulier, on a pour tout nombre réel θ :

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}} \ , \ \left|e^{i\theta}\right| = 1 ,$$

et, pour tout entier n :

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \text{ (formule de MOIVRE).}$$

Démonstration. — Il suffit d'établir la formule d'EULER, car les autres propriétés s'en déduisent immédiatement. Pour deux nombres réels θ et θ', on a en vertu des formules d'addition des lignes trigonométriques[4] :

$$\begin{aligned} e^{i\theta}e^{i\theta'} &= \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)\left(\cos\theta' + i\sin\theta'\right) \\ &= \left(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'\right) + \\ &\qquad i\left(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'\right) \\ &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') = e^{i(\theta+\theta')} , \end{aligned}$$

ce qui démontre le théorème. ■

Pour tout angle θ et tout entier $n \geq 1$, on a en vertu de la formule de MOIVRE :

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) &= (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \\ &= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} i^{n-p} \cos^p(\theta)\sin^{n-p}(\theta). \end{aligned}$$

[4] Une démonstration de ces formules est donnée en appendice.

On en déduit, en identifiant les parties réelles et imaginaires des deux membres, les expressions de $cos(n\theta)$ et $sin(n\theta)$ en fonction de $cos\theta, sin\theta$ et de leurs puissances.

EXEMPLE. — *Soit à calculer* $cos\,3\theta$ *en fonction de* $cos\,\theta$ *et de ses puissances.*

Solution. — D'après la formule de MOIVRE, on a :

$$(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)^3 = cos^3\theta - 3\,sin^2\theta\,cos\,\theta + i\left(3\,sin\,\theta\,cos^2\theta - sin^3\theta\right),$$

d'où $cos\,3\theta = cos^3\theta - 3\,sin^2\theta\,cos\,\theta$. On en déduit immédiatement que $cos\,3\theta = 4\,cos^3\theta - 3\,cos\,\theta$. ■

Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non nuls, et notons $zz' = r''e^{i\theta''}$ leur produit. D'après la formule d'EULER, on a :

$$zz' = re^{i\theta}r'e^{i\theta'} = rr'e^{i\theta}e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')},$$

d'où il résulte que :

$$r'' = rr' \text{ et } \theta'' = \theta + \theta' \quad (mod\ 2\pi).$$

On a ainsi montré :

THÉORÈME 3. — *Le module d'un produit* zz' *de deux nombres complexes* z *et* z' *est le produit des modules de* z *et de* z' *; l'argument de* zz' *est la somme des arguments de* z *et de* z' *(à un multiple entier de* 2π *près).*

Le théorème 3 conduit à l'interprétation géométrique suivante du produit de deux nombres complexes non nuls z et z'. Notons M, M' et M'' les points d'affixes z, z' et $z'' = zz'$. Soit U le point d'affixe 1. Alors, le point M'' s'obtient en construisant sur OM' un triangle $OM'M''$ directement semblable au triangle OUM.

3. Complexes et géométrie plane. — Soient $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ deux vecteurs du plan, de coordonnées respectives (x,y) et (x',y') dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On appelle *produit scalaire* de $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ le nombre réel $\vec{V}.\vec{V}'$ défini par :

$$\vec{V}.\vec{V}' = xx' + yy'.$$

Par ailleurs, on appelle *produit mixte* de $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ le nombre réel $(\vec{V},\vec{V}')$ défini par :

$$(\vec{V},\vec{V}') = xy' - yx'.$$

On écrit encore :

$$xy' - yx' = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = Det\left(\begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}\right),$$

et on appelle également cette quantité le *déterminant* de la matrice carrée à deux lignes et deux colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$$

obtenue en écrivant en colonne les coordonnées des vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$.

Si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, on vérifie immédiatement que le produit scalaire et le produit mixte de deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ de coordonnées respectives (x,y) et (x',y') sont donnés par les formules suivantes :

$$\begin{cases} \vec{V}.\vec{V}' & = Re(\overline{z}z') \\ (\vec{V},\vec{V}') & = Im(\overline{z}z'). \end{cases}$$

Le théorème 3 permet alors d'interpréter géométriquement les notions de produit scalaire et de produit mixte. On a en effet :

PROPOSITION 1. — *Soient $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ deux vecteurs non nuls du plan. Si θ désigne l'angle orienté de $\vec{V}'$ avec $\vec{V}$*[5]*, on a :*

---

[5] C'est l'angle, défini modulo 2π, d'une rotation dans le sens trigonométrique direct permettant de faire coïncider le demi axe orienté porté par $\vec{V}$ avec celui défini par $\vec{V}'$.

$$\begin{cases} \vec{V}.\vec{V}' = \|\vec{V}\|.\|\vec{V}'\| \cos\theta \\ (\vec{V},\vec{V}') = \|\vec{V}\|.\|\vec{V}'\| \sin\theta. \end{cases}$$

Démonstration. — Soient $z = |z|e^{i\alpha}$ et $z' = |z'|e^{i\alpha'}$ les nombres complexes représentant $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ respectivement. Comme α et α' sont les angles de $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ avec l'axe des x, la différence $\alpha' - \alpha$ est égale à θ modulo 2π. Par ailleurs, on a $|z| = \|\vec{V}\|$ et $|z'| = \|\vec{V}'\|$. De la relation :

$$\bar{z}z' = |z|e^{-i\alpha}|z'|e^{i\alpha'} = |z||z'|e^{i(\alpha'-\alpha)} = |z||z'|e^{i\theta},$$

on déduit :

$$\bar{z}z' = |z||z'|(\cos\theta + i\sin\theta) = \|\vec{V}\|\|\vec{V}'\|(\cos\theta + i\sin\theta),$$

et le résultat s'ensuit en identifiant les parties réelles et imaginaires des deux membres. ■

Il résulte de la proposition 1 que deux vecteurs (non nuls) sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul. Par extension, on dira que deux vecteurs, nuls ou non, sont *orthogonaux* si leur produit scalaire est nul. Comme le cosinus d'un angle est compris entre -1 et 1, il résulte de la proposition 1 que :

$$|\vec{V}.\vec{V}'| \leq \|\vec{V}\|.\|\vec{V}'\|.$$

Cette inégalité, très utile en géométrie, est appelée l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ. Elle reste vraie lorsque $\vec{V}$ ou $\vec{V}'$ est nul. On notera qu'elle se réduit à une égalité si et seulement si $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ sont colinéaires (en vertu de la proposition 1).
De la relation $(\vec{V},\vec{V}') = \|\vec{V}\|.\|\vec{V}'\| \sin\theta$, on déduit immédiatement que la valeur absolue $|(\vec{V},\vec{V}')|$ du produit mixte de $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ est égale à l'aire de tout parallélogramme $ABCD$ tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{V}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{V}'$. Un tel parallélogramme est dit engendré par $\vec{V}$ et $\vec{V}'$. Le produit mixte représente en fait

l'aire algébrique du parallélogramme engendré par $\vec{V}$ et $\vec{V}'$. L'aire algébrique n'est autres que l'aire comptée positivement lorsque l'angle orienté de $\vec{V}'$ avec $\vec{V}$ est compris entre 0 et π (modulo 2π), et comptée négativement si l'angle orienté de $\vec{V}'$ avec $\vec{V}$ est compris entre $-\pi$ et 0.

De l'expression du produit scalaire de deux vecteurs au moyen des nombres complexes, on déduit :

PROPOSITION 2. — *Si $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ sont deux vecteurs du plan, on a :* $\|\vec{V}+\vec{V}'\|^2 = \|\vec{V}\|^2 + \|\vec{V}'\|^2 + 2\vec{V}.\vec{V}'$.

Démonstration. — Soient z et z' les nombres complexes associés à $\vec{V}$ et $\vec{V}'$. On a :

$$\begin{aligned}\|\vec{V}+\vec{V}'\|^2 &= (\overline{z+z'})(z+z') = \bar{z}z + \bar{z}'z' + \bar{z}z' + \bar{z}'z \\ &= |z|^2 + |z'|^2 + 2\,Re(\bar{z}z') = \|\vec{V}\|^2 + \|\vec{V}'\|^2 + 2\vec{V}.\vec{V}',\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

COROLLAIRE. — *Dans un triangle ABC du plan, les côtés $a = BC, b = AC, c = AB$ vérifient :*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

où α désigne l'angle en A.

Démonstration. — Posons $\vec{V} = \overrightarrow{BA}$ et $\vec{V}' = \overrightarrow{AC}$. On a $\vec{V}+\vec{V}' = \overrightarrow{BC}$, et la proposition 2 implique :

$$\begin{aligned}a^2 &= \|\overrightarrow{BC}\|^2 = \|\vec{V}+\vec{V}'\|^2 = \|\vec{V}\|^2 + \|\vec{V}'\|^2 + 2\vec{V}.\vec{V}' \\ &= c^2 + b^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} = c^2 + b^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \\ &= c^2 + b^2 - 2\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|\cos\alpha = c^2 + b^2 - 2bc\cos\alpha,\end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

On observera que le corollaire ci-dessus se réduit au théorème de PYTHAGORE lorsque le triangle ABC est rectangle en A.

4. Racine carrée d'un complexe. — Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. On appelle *racine carrée* de z tout nombre complexe $Z = X + iY$ tel que $Z^2 = z$. Si $z = 0$, alors $Z = 0$ est l'unique racine carrée de z. Supposons $z \neq 0$; notons $z = re^{i\theta}$ sa forme trigonométrique et posons :

$$Z_o = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} .$$

D'après la formule de MOIVRE, on a $Z_o^2 = z$. Il s'ensuit que toute racine carrée Z de z vérifie :

$$\left(Z - Z_o\right)(Z + Z_o) = Z^2 - Z_o^2 = Z^2 - z = 0 ,$$

d'où nécessairement :

$$Z = \pm Z_o = \pm\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} .$$

On vérifie que ces deux valeurs sont bien des racines de z. Ainsi, tout nombre complexe admet une racine carrée, et même deux racines carrées distinctes s'il est non nul. Notons que, si $z = -|z|$ est un nombre réel négatif ou nul, ses racines carrées complexes sont données par $Z = \pm i\sqrt{|z|}$; la vérification est immédiate.

5. Résolution de l'équation du second degré. — Considérons l'équation du second degré :

$$(1) \quad az^2 + bz + c = 0 ,$$

où a,b,c sont des nombres complexes (avec $a \neq 0$). Pour résoudre cette équation, on écrit :

$$(2) \; az^2 + bz + c = a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

où $\Delta = b^2 - 4ac$ est le *discriminant* de l'équation (1). Soit $\sqrt{\Delta}$ une racine carrée complexe de Δ (une telle racine existe en vertu de ce qui précède) et posons :

$$\omega_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} .$$

On a :

$$\left(\omega_\pm + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2},$$

et il résulte de (2) que $a\omega_\pm^2 + b\omega_\pm + c = 0$. Ainsi, l'équation (1) possède toujours deux racines complexes (qui peuvent éventuellement être confondues lorsque $\Delta = 0$). Lorsque a, b, c sont réels et que $\Delta < 0$, on a $\sqrt{\Delta} = \pm i\sqrt{|\Delta|}$ et les racines $\omega_\pm$ sont conjuguées l'une de l'autre. Dans tous les cas, on a :

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$
$$= (z - \omega_+)(z - \omega_-),$$

De sorte que le polynôme $P(z) = az^2 + bz + c$ admet la factorisation suivante :

$$P(z) = a(z - \omega_+)(z - w_-).$$

EXEMPLE. — *Soit à résoudre l'équation du second degré* $z^2 - z\sqrt{3} + 1 = 0$.

Solution. — Le discriminant de cette équation à coefficients réels est égal à -1 ; il admet donc i comme racine carrée complexe. Les racines de l'équation donnée sont donc :

$$\omega_\pm = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \pm i\tfrac{1}{2}.$$

On vérifie que ces racines sont complexes conjuguées, et que l'on a bien la factorisation :

$$z^2 - z\sqrt{3} + 1 = \left(z - \tfrac{\sqrt{3}}{2} - \tfrac{i}{2}\right)\left(z - \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{i}{2}\right). \ \blacksquare$$

III. — Le théorème fondamental de l'algèbre

On a vu que, si un polynôme du second degré à coefficients réels n'admet pas toujours de racine réelle, il possède en revanche deux racines complexes (distinctes ou confondues). Nous étendons ci-dessous ce résultat aux polynômes à coefficients complexes de degré $n \geq 1$.

1. **Racines d'un polynôme**. — On appelle *polynôme* de degré n à coefficient complexes ($n \geq 1$) une application P de $\mathbb{C}$ dans lui-même de la forme :

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + ... + c_1 z + c_o ,$$

où $c_o, c_1, ..., c_n$ sont des nombres complexes, appelés *coefficients* de P, tels que $c_n \neq 0$.

Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients complexes. On dit qu'un nombre complexe a est une *racine* (ou un zéro) de P si $P(a) = 0$. Lorsque les coefficients de P sont réels, on a pour toute racine complexe a de P :

$$P(\bar{a}) = \overline{P(a)} = 0 ,$$

de sorte que le complexe conjugué $\bar{a}$ de a est aussi racine de P. L'existence d'une racine a pour le polynôme $P(z)$ permet de mettre le monôme $z - a$ en facteur. En effet, on a :

PROPOSITION 3. — *Si a est une racine du polynôme P, il existe un polynôme Q à coefficients complexes tel que l'on ait :*

$$P(z) = (z - a)Q(z) \text{ pour tout } z \in \mathbb{C} .$$

Preuve. — Si a est racine de $P(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k$, la relation $P(a) = 0$ implique :

$$P(z) = P(z) - P(a) = \sum_{k=1}^{n} c_k (z^k - a^k) ,$$

et il suffit de montrer que $z - a$ peut être mis en facteur dans le polynôme $z^k - a^k$ ($k \geq 1$). Mais cela résulte de la formule :

$$z^k - a^k = (z - a)(z^{k-1} + z^{k-2} a + ... + z a^{k-2} + a^{k-1}) ,$$

dont la vérification est immédiate. ■

2. Théorème fondamental de l'algèbre. — Dès le XVIe siècle, les mathématiciens pensaient que tout polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients réels possède n racines, réelles ou complexes. On doit à d'ALEMBERT une première preuve de ce résultat, malheureusement incomplète. Il faudra attendre 1799 pour que GAUSS complète cette démonstration.

THÉORÈME 4. — *Tout polynôme à coefficients complexes de degré* $n \geq 1$ *possède au moins une racine complexe.*

Ce résultat[6], encore appelé théorème fondamental de l'algèbre, fait du corps des nombres complexes le cadre naturel de la théorie des équations algébriques.

3. Factorisation des polynômes. — Considérons un polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients complexes :

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k \ .$$

Le théorème de d'ALEMBERT assure que P possède au moins une racine complexe a_1. D'après la proposition 3, il existe un polynôme P_{n-1} de degré $n-1$ à coefficients complexes tel que :

$$P(z) = (z - a_1) P_{n-1}(z) .$$

Si P_{n-1} n'est pas une constante, le raisonnement précédent appliqué à P_{n-1} montre l'existence d'un nombre complexe a_2 et d'un polynôme P_{n-2} de degré $n-2$ à coefficients complexes tels que :

$$P_{n-1}(z) = (z - a_2) P_{n-2}(z), \text{ d'où :}$$

$$P(z) = (z - a_1) P_{n-1}(z) = (z - a_1)(z - a_2) P_{n-2}(z) .$$

En itérant le raisonnement, on met successivement en évidence des nombres complexes $a_2, \ldots, a_n$ tels que :

$$P(z) = (z - a_1)(z - a_2) \ldots (z - a_n) P_o(z) ,$$

où P_o est un polynôme de degré 0. Mais alors, P_o est un polynôme constant, nécessairement égal au

[6] Une démonstration de ce résultat est donnée en appendice.

coefficient c_n du terme de plus haut degré. On a ainsi montré :

THÉORÈME 4. — *Pour tout polynôme* P *de degré* $n \geq 1$ *à coefficients complexes, il existe* n *nombres complexes* $a_1, a_2, ..., a_n$*, non nécessairement distincts, tels que l'on ait :*

$$P(z) = c_n(z - a_1)(z - a_2)...(z - a_n),$$

où c_n *est le coefficient du terme de plus haut degré de* P.

En regroupant les monômes identiques, on factorise P en polynômes de degré un sous la forme :

$$(1)\ P(z) = c_n \prod_{k=1}^{p} (z - a_k)^{\alpha_k},$$

où chaque a_k est une racine de P répétée α_k fois. On dit que a_k est une racine de P d'ordre α_k et que α_k est la multiplicité de a_k. La factorisation (1) est appelée la *décomposition* de P en polynômes irréductibles sur le corps des complexes.

Si les coefficients de P sont réels, on sait que les racines de P sont réelles ou complexes conjuguées. Si a et $\overline{a}$ sont deux racines complexes conjuguées de P, on a pour tout x réel :

$$(x - a)(x - \overline{a}) = x^2 + px + q,$$

où $p = -2\,Re(a)$ et $q = |a|^2$ sont réels. En outre, le discriminant du polynôme $x^2 + px + q$ est négatif (sinon ses racines seraient réelles). Notons alors $a_1, a_2, ..., a_r$ les racines réelles de P, de multiplicités respectives $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ et $b_1, b_2, ..., b_s$ les racines complexes de P, de multiplicités $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_s$. Il résulte de ce qui précède que le polynôme P (à coefficients réels) se factorise en polynômes à coefficients réels de degré un ou deux sous la forme :

$$(2)\ P(x) = c_n \prod_{i=1}^{r} (x - a_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^{s} (x^2 + p_j x + q_j)^{\beta_j},$$

où les trinômes $x^2 + p_j x + q_j$ ont des discriminants négatifs. On dit que (2) est la décomposition de P en facteurs irréductibles sur le corps des réels.

EXERCICES

EXERCICE 1

1) Calculer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$.

2) Mettre z sous forme trigonométrique.

3) Calculer z^3.

EXERCICE 2

1) Déterminer les racines complexes de l'équation :

$$8z^2 - 4i\sqrt{2}z + i\sqrt{3} = 0 .$$

2) En déduire une factorisation du polynôme :

$$P(z) = 8z^2 - 4i\sqrt{2}z + i\sqrt{3} .$$

EXERCICE 3

1) Montrer que l'on a, pour tout nombre complexe z distinct de 1 et tout entier $n \geq 1$:

$$1 + z + z^2 + ... + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} .$$

2) En déduire que l'on a, pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel θ non congru à 0 modulo 2π :

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + ... + \cos n\theta = \frac{\sin(2n+1)\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}} + \frac{1}{2} .$$

EXERCICE 4

1) Montrer que l'on a, pour a et b complexes :

$$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2\left(|a|^2 + |b|^2\right).$$

2) En déduire que la somme des carrés des diagonales d'un parallélogramme $ABCD$ du plan est égal à la somme des carrés de ses côtés :

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 .$$

EXERCICE 5

1) Soit $a > 0$. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $\frac{z+a}{z-a}$ soit imaginaire pur.

2) En déduire le lieu des points M du plan d'où l'on voit un segment AB sous un angle droit, i.e.

$$Angle(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \pm\frac{\pi}{2}.$$

EXERCICE 6

1) Déterminer les racines des polynômes $z^2 - i$ et $z^2 + i$.

2) En déduire une factorisation du polynôme $P(z) = z^4 + 1$ en produits de deux polynômes du second degré à coefficients réels et à discriminants négatifs.

INDICATIONS

EXERCICE 1. — 1) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$. 2) $z = e^{i\frac{\pi}{6}}$. 3) $z^3 = i$.

EXERCICE 2. — 1) Le discriminant de l'équation, donné par $\Delta = -64(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 8^2 e^{i\frac{4\pi}{3}}$, possède une racine carrée qui est $\sqrt{\Delta} = 8e^{i\frac{2\pi}{3}} = 8\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Il s'ensuit que les racines de l'équation $8z^2 - 4i\sqrt{2}z + i\sqrt{3} = 0$ sont :

$$\begin{cases} z_1 = -\frac{1}{4} + i\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{4}\right) \\ z_2 = \frac{1}{4} + i\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{4}\right). \end{cases}$$

2) $P(z) = 8z^2 - 4i\sqrt{2}z + i\sqrt{3} = 8(z - z_1)(z - z_2)$.

EXERCICE 3. — 1) Il suffit de vérifier l'égalité :

$$(z-1)(1 + z + ... + z^n) = z^{n+1} - 1.$$

2) Pour $z = e^{i\theta}$, on a en vertu de la question 1 :

$$1 + e^{i\theta} + ... + e^{in\theta} = \frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$
$$= e^{i\frac{n}{2}\theta} \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}},$$

d'où, en prenant les parties réelles :

$$1+\cos\theta+\ldots+\cos n\theta=\frac{\cos\frac{n}{2}\theta\,\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

En utilisant la relation :

$$\cos\tfrac{n}{2}\theta\,\sin\tfrac{n+1}{2}\theta=\tfrac{1}{2}\left(\sin\tfrac{2n+1}{2}\theta+\sin\tfrac{\theta}{2}\right),$$

on en déduit le résultat.

EXERCICE 4. — 1) Il suffit de sommer les deux relations :

$$|a\pm b|^2=(a\pm b)(\bar a\pm\bar b)=|a|^2+|b|^2\pm 2\,Re(a\bar b).$$

2) Soit a (resp. b) le nombre complexe associé au vecteur $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ (resp. au vecteur $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$). Alors, $a+b$ est associé au vecteur $\overrightarrow{AC}$ et $a-b$ est associé au vecteur $\overrightarrow{DB}$. Comme AC et DB sont les diagonales du parallélogramme $ABCD$, le résultat est une conséquence directe de 1).

EXERCICE 5. — 1) Comme $Re\left(\frac{z+a}{z-a}\right)=\frac{|z|^2-a^2}{|z-a|^2}$, l'ensemble cherché est le cercle $|z|=a$, privé des points d'affixe $\pm a$.

2) On se ramène facilement au cas où A et B ont pour affixes respectives $\pm a$, avec $a=\frac{AB}{2}$. Soit z l'affixe du point M. Comme l'argument de $\frac{z+a}{z-a}$ est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$, la condition $Angle(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})=\pm\frac{\pi}{2}$ équivaut, si $z\neq\pm a$, au fait que $\frac{z+a}{z-a}$ soit imaginaire pur. Il résulte alors de la question 1 que le lieu du point M est le cercle de diamètre AB.

EXERCICE 6. — 1) Les racines du polynôme z^2-i sont $\alpha_\pm=\pm\frac{\sqrt2}{2}(1+i)$, et les racines du polynôme z^2+i sont $\beta_\pm=\pm\frac{\sqrt2}{2}(1-i)=\bar\alpha_\pm$.

2) On a :

$$\begin{aligned}z^4+1&=(z^2-i)(z^2+i)\\&=(z-\alpha_+)(z-\alpha_-)(z-\bar\alpha_+)(z-\bar\alpha_-)\\&=(z^2-2\,Re\,\alpha_+z+|\alpha_+|^2)(z^2-2\,Re\,\alpha_-z+|\alpha_-|^2)\\&=(z^2-\sqrt2 z+1)(z^2+\sqrt2 z+1).\end{aligned}$$