

TECHNIQUES MATHÉMATIQUES DE BASE

Contrôle continu terminal du 14 juin 2012

Durée de l'épreuve : 2h

AVERTISSEMENT. Les calculatrices sont interdites. Le contrôle comporte quatre exercices indépendants, de niveau équivalent. Ils seront chacun notés sur 10 ; un barème figure à titre indicatif. On attachera du prix à la rédaction.

EXERCICE I

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par $f(x) = x^{1/x}$.

Question 1 (1 point). Préciser le domaine de définition D de f .

Question 2 (4 points). Calculer la dérivée de f . Étudier le signe de $f'(x)$ pour $x \in D$ et en déduire les variations de f .

Question 3 (3 points). Calculer les limites de f en $+\infty$ et en 0 à droite, et représenter le graphe de f dans un repère orthonormé (on précisera les éventuelles asymptotes).

Question 4 (2 points). Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand $x \rightarrow 0^+$.

EXERCICE II

Question 1 (5 points). Décomposer $\frac{3x^2 - x}{(x-1)(x^2+1)}$ en éléments simples.

Question 2 (5 points). En déduire

$$\int_{-1}^0 \frac{3x^2 - x}{(x-1)(x^2+1)} dx.$$

EXERCICE III

Question 1 (5 points). Résoudre l'équation différentielle

$$y' + (\ln x)y = 0 \quad (x > 0).$$

Question 2 (5 points). En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle

$$y' + (\ln x)y = x^{1-x} \quad (x > 0).$$

EXERCICE IV

Question 1 (5 points). Résoudre l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Question 2 (5 points). En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = \cos x.$$
