Corrigé du CC2

Exercice 1. (8.5 points) Notons (x, y) les coordonnées du point M du plan dans le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ i.e. écrivons $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$.

1)

a) r est la rotation affine de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$: $r(M) = O + L_r(\overrightarrow{OM})$ où la rotation linéaire L_r est donnée par

$$L_r(\vec{i}) = cos\frac{\pi}{3}\,\vec{i} + sin\frac{\pi}{3}\,\vec{j}, \quad L_r(\vec{j}) = -sin\frac{\pi}{3}\,\vec{i} + cos\frac{\pi}{3}\,\vec{j}.$$

On a donc

$$r(M) = O + (\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y)\,\vec{i} + (\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y)\,\vec{j}.$$

s est la réflexion affine de droite fixe $O + \langle\vec{j}\rangle$: $s(M) = O + L_s(\overrightarrow{OM})$ où la réflexion linéaire L_s est donnée par

$$L_s(\vec{i}) = -\vec{i},\ L_s(\vec{j}) = \vec{j}.$$

On a donc

$$s(M) = O - x\,\vec{i} + y\,\vec{j}.$$

τ est la translation de vecteur $\vec{i}$:

$$\tau(M) = M + \vec{i} = O + \overrightarrow{OM} + \vec{i} = O + (x+1)\,\vec{i} + y\,\vec{j}.$$

b) $\tau = s \circ \sigma_D$ équivaut à $s \circ \tau = s^2 \circ \sigma_D = \sigma_D$ (car $s^2 = id$). Il s'agit d'étudier $s \circ \tau$.
Pour commencer, $s \circ \tau$ est une isométrie car composée d'isométries et $L_{s\circ\tau} = L_s \circ L_\tau = L_s \in O_2^-$.
Dans le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$,

$$s \circ \tau(x, y) = s(x+1, y) = (-x-1, y).$$

Elle satisfait $(s \circ \tau)^2 = id$, c'est donc une symétrie.
$s \circ \tau$ admet pour points fixes les points pour lesquels

$$(x, y) = (-x-1, y)$$

i.e. la droite affine D d'équation $x = -\frac{1}{2}$.
Conclusion: $s \circ \tau$ est la réflexion affine de droite D.

Idem pour l'autre cas: $\tau = \sigma_{D'} \circ s$ équivaut à $\sigma_{D'} = \tau \circ s$. Dans le repère $\mathcal{R}$

$$\tau \circ s(x, y) = \tau(-x, y) = (-x+1, y)$$

C'est la réflexion de droite D' d'équation $x = \frac{1}{2}$.

c) On procède comme au point b).

$$\sigma_\Delta(x,y) = s \circ r(x,y) = (-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y)$$

dont la droite de points fixes Δ a pour équation $y = \sqrt{3}x$ et

$$\sigma_{\Delta'}(x,y) = r \circ s(x,y) = (-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y, -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y)$$

dont la droite fixe Δ' a pour équation $y = -\sqrt{3}x$.

2) D'après notre définition d'une *rotation affine* il s'agit de vérifier que $r \circ \tau \neq id$, $L_{r\circ\tau} \in O_2^+$ et $r \circ \tau$ admet un point fixe.

Pour les 2 premiers points, observer que $L_{r\circ\tau} = L_r \circ L_\tau = L_r \in O_2^+ \setminus \{id\}$. Quant au point fixe, on a

$$r \circ \tau = (\sigma_{\Delta'} \circ s) \circ (s \circ \sigma_D) = \sigma_{\Delta'} \circ \sigma_D.$$

Dès lors le point d'intersection $J \in \Delta' \cap D$ est fixe.

On fait de même pour l'autre:

$$\tau \circ r = (\sigma_{D'} \circ s) \circ (s \circ \sigma_\Delta) = \sigma_{D'} \circ \sigma_\Delta$$

et le point d'intersection $J' \in D' \cap \Delta$ est fixe.

Questions de cours (4 points)

1) Voir la fiche *barycentres et convexité* sur la page de cours.

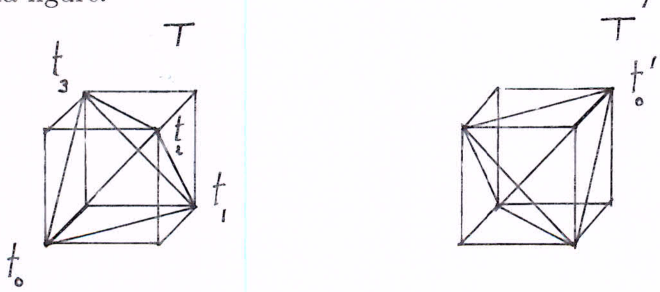
2) On suppose T non-aplati. Les sommets (A, B, C, D) de T forment une base affine de $\mathbf{R}^3$. f étant une bijection affine $(f(A), f(B), f(C), f(D))$ est aussi une base affine de $\mathbf{R}^3$. Le tétraèdre plein $[T]$ est l'enveloppe convexe $[A, B, C, D]$. Par le cours on sait que l'image par f de l'enveloppe convexe d'une partie finie P est l'enveloppe convexe de la partie image $f(P)$. On a donc

$$f[A, B, C, D] = [f(A), f(B), f(C), f(D)].$$

Conclusion: l'image par la bijection affine f du tétraèdre plein de sommets A, B, C, D est le tétraèdre plein de sommets $f(A), f(B), f(C), f(D)$.

Exercice 2. (9.5 points + *3 pts hors-barème*)

1) Voici la figure:



2)

a) $f \notin G_T$ s'écrit: *il existe un sommet t_i de T tel que $f(t_i) \notin T$.*

Attention aux fautes de logique: pour rappel, la négation de l'assertion: $\forall x, P(x)$ (*quelquesoit x, $P(x)$ est vraie*) est l'assertion: $\exists x, non P(x)$ (*il existe x pour lequel $P(x)$ est fausse*); ce n'est pas, comme certains l'affirment, l'assertion: $\forall x, non P(x)$ (*quelquesoit x, $P(x)$ est fausse*).

b) On suppose qu'il existe un sommet $t_i \in T$ tel que $f(t_i) \notin T$. $f(t_i)$ est alors un sommet de T' à distance 1 de trois sommets de T et à distance $\sqrt{3}$ du quatrième sommet de T.

Pour voir que f envoie tout sommet de T sur un sommet de T', observer que si l'un des sommets $t_j \neq t_i$ de T était tel que $f(t_j) \in T$, alors

$$\sqrt{2} = d(t_j, t_i) = d(f(t_j), f(t_i)) \in \{1, \sqrt{3}\}.$$

C'est absurde.

c) Supposons $f \in G_C$.

Si $f \notin G_T$ alors par le b), f envoie tout sommet de T sur un sommet de T', ce qui s'écrit: $\forall j, f(t_j) \in T'$. On a donc $\forall j, s \circ f(t_j) \in s(T') = T$, i.e. $s \circ f \in G_T$ ce qui équivaut (en composant par s) à $f \in s \circ G_T$.

Conclusion: $G_C \subset G_T \cup s \circ G_T$.

3)

a) Pour montrer que tout sommet de T' est barycentre des sommets de T, trois sommets étant pondérés par le coefficient 1 et le quatrième par -1, il suffit de faire le calcul en utilisant:

$$\begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & t_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = t_0 + \frac{1}{a_0 + a_1 + a_2 + a_3} (a_1 \overrightarrow{t_0 t_1} + a_2 \overrightarrow{t_0 t_2} + a_3 \overrightarrow{t_0 t_3}).$$

Par exemple (cf figure plus haut)

$$\begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & t_3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = t_0 + \frac{1}{2} ((t_1 - t_0) + (t_2 - t_0) + (t_3 - t_0)) = t'_0.$$

Attention aux fautes d'inattention: pour certains étudiants $1+1+1-1 = 3$! D'autres n'hésitent pas à appliquer l'associativité du barycentre pour les coefficients $(1, -1)$ et $(1, 1)$ alors que $1 - 1 = 0$!

b) Supposons $f \in G_T$. Par conservation des barycentres et des sommets de T on a

$$\begin{aligned} f \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & t_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f(t_0) & f(t_1) & f(t_2) & f(t_3) \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t_{\sigma(0)} & t_{\sigma(1)} & t_{\sigma(2)} & t_{\sigma(3)} \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

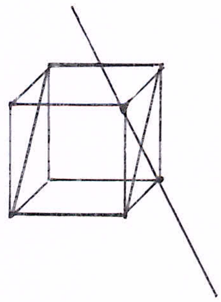
pour une certaine permutation σ de $\{0, 1, 2, 3\}$. Par le point a) (prendre 3 coefficients égaux à 1 et le quatrième égal à -1) f envoie tout sommet de T' sur un barycentre des sommets de T pondérés par $1, 1, 1, -1$, i.e. sur un sommet de T' et dès lors tout sommet de C sur un sommet de C i.e. $f \in G_C$. Donc $G_T \subset G_C$. Par ailleurs $s \in G_C$ et G_C est un sous-groupe du groupe affine, donc $s \circ G_T \subset G_C$.

Conclusion: $G_T \cup s \circ G_T \subset G_C$. Pour l'autre inclusion cf **2)** c).

4)

a) On a $G_C = G_T \cup s \circ G_T$ et $G_T \cap s \circ G_T = \emptyset$. D'où $| G_C | = 2 \mid G_T \mid = 2 \mid S_4 \mid = 48$.

b) Voici la figure:



c) Il y a autant de symétries s_{ij} que de paires de sommets (i.e. que d'arêtes) de T. Le nombre de paires est $\binom{4}{2} = 6$.

5)* *(hors-barème)*

a) On sait que le groupe de permutations S_4 est engendré par les transpositions i.e. toute permutation $\sigma \in S_4$ s'écrit comme composée d'un nombre fini de transpositions (ij), $i < j$. Par l'isomorphisme ρ de restriction aux sommets de T

$$\rho : G_T \to S_4 : f \mapsto f_{|\{t_0,t_1,t_2,t_3\}}$$

les symétries s_{ij} de la question 4) deviennent les transpositions (ij). Pour voir que toute $f \in G_T$ est une composée des symétries s_{ij} , il suffit d'écrire

$$\rho(f) = (i_1 j_1) \cdots (i_k j_k)$$

dans S_4 et ensuite de ramener par ρ^{-1} cette décomposition dans G_T:

$$f = \rho^{-1}\big((i_1 j_1) \cdots (i_k j_k)\big) = \rho^{-1}((i_1 j_1)) \circ \cdots \circ \rho^{-1}((i_k j_k)) = s_{i_1 j_1} \circ \cdots \circ s_{i_k j_k}.$$

b) Il s'agit de faire la liste des éléments de S_4 et ensuite la liste $\rho^{-1}(S_4) = G_T$:

- l'identité.

- les 6 transpositions $(ij), i < j$ qui donnent les 6 réflexions $s_{ij} = \rho^{-1}(ij)$.

- les 8 cycles d'ordre 3 i.e. les permutations de la forme (ijk) qui donnent 8 rotations $\rho^{-1}(ijk)$ d'axe passant par l'isobarycentre de la face contenant t_i, t_j, t_k et par le sommet opposé et dont les angles sont $\pi/3, 2\pi/3$.

Par exemple, $\rho^{-1}(132)$ est la rotation d'axe $\langle t_0, \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ d'angle $\pi/3$.

- les 6 cycles de longueur 4 de la forme $(ijkl) = (ij)(jk)(kl)$ qui donnent 6 antidéplacements $\rho^{-1}(ijkl)$ qui sont les composées d'une rotation d'ordre 3 et d'une réflexion.

- les 3 permutations de S_4 qui ne sont pas des cycles: $(01)(23), (02)(13), (03)(12)$ qui donnent 3 rotations d'axe passant par les centres de 2 faces opposées du cube C et d'angle π.

$1 + 6 + 8 + 6 + 3 = 24$. Le compte est bon.