L3 - Mathématiques pour l'Enseignement - Géométrie élémentaire. 2011-2012

Contrôle continu du 14 mai 2012

Durée: 2 heures

- Les documents, calculettes et téléphones portables ne sont pas autorisés -

Exercice 1

On se place dans le plan affine euclidien $\mathbf{R}^2$ muni du repère orthonormé $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$.

On appelle *rotation affine* de centre $I \in \mathbf{R}^2$ toute application affine $\rho \neq id$ fixant I et telle que $L_\rho \in O_2^+$ et *réflexion affine* par rapport à la droite D l'unique symétrie affine σ_D de droite fixe D telle que $L_{\sigma_D} \in O_2^-$.

On désigne par r la rotation affine de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$, par τ la translation de vecteur $\vec{i}$ et par s la réflexion affine par rapport à l'axe des ordonnées $O + < \vec{j} >$.

1)

a) Expliciter r, s et τ dans le repère $\mathcal{R}$.

b) Montrer, en déterminant leurs équations cartésiennes dans le repère $\mathcal{R}$, qu'il existe d'uniques droites affines D et D' telles que

$$\tau = s \circ \sigma_D = \sigma_{D'} \circ s.$$

c) Même question pour les droites affines Δ et Δ' telles que

$$r = s \circ \sigma_\Delta = \sigma_{\Delta'} \circ s.$$

2) Montrer que $r \circ \tau$ et $\tau \circ r$ sont des rotations affines dont on déterminera les centres respectifs J et J' uniquement à l'aide des droites D, D', Δ et Δ'.

Questions de cours

1) Définir et donner une formule permettant de déterminer

- le *barycentre* d'une famille de points pondérés $(p_i, a_i)_{0 \leq i \leq r}$ de $\mathbf{R}^n$,

- l'*enveloppe convexe* d'une famille de points $(p_i)_{0 \leq i \leq r}$ de $\mathbf{R}^n$.

2) Soient A, B, C, D les quatre sommets d'un tétraèdre plein $[T] \subset \mathbf{R}^3$ et f une bijection affine de $\mathbf{R}^3$.

Donner, en justifiant votre réponse, une description géométrique de l'image $f([T])$ de $[T]$.

[On ne demande pas ici de démontrer les propositions de cours utilisées; par contre, tout énoncé utilisé doit être cité avec soin.]

Exercice 2

On se place dans l'espace affine $\mathbf{R}^3$ muni de la distance euclidienne d usuelle. On désigne par C le cube unité situé dans le premier octant $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ et dont l'un des sommets est $(0,0,0)$.

On désigne par G_C le sous-groupe des bijections affines de $\mathbf{R}^3$ qui conservent
- la distance, i.e. telles que $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}'))$ quels que soient $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbf{R}^3$,
- l'ensemble des sommets du cube C, i.e. telles que pour tout sommet $\mathbf{t}$ de C, $f(\mathbf{t})$ est un sommet de C.

Soit
$$s : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 : M \mapsto O - \overrightarrow{OM}$$
la symétrie affine d'unique point fixe le centre O de C.

On se propose d'étudier G_C à l'aide d'une partition des sommets de C en les sommets de deux tétraèdres réguliers de côté $\sqrt{2}$.

1) Représenter sur une figure du cube C deux tétraèdres T et T' de longueur d'arêtes $\sqrt{2}$ dont les sommets, deux à deux distincts, sont les sommets du cube C et tels que $s(T) = T'$.

On désigne par G_T le sous-groupe des isométries affines qui conservent l'ensemble des sommets $\{t_0, t_1, t_2, t_3\}$ de T.

2) Soit $f \in G_C$.

a) Expliciter (par une phrase mathématique) l'assertion: $f \notin G_T$.

b) En raisonnant sur la distance entre sommets, montrer que si $f \notin G_T$ alors f envoie tout sommet de T sur un sommet de T'.

c) En déduire que
$$G_C \subset G_T \cup s \circ G_T.$$

3) a) Montrer que tout sommet t_i' de T' est barycentre des sommets de T dont trois sont affectés du poids 1 et le quatrième est affecté du poids -1.

b) En déduire que si $f \in G_T$ alors $f \in G_C$ et que $G_C = G_T \cup s \circ G_T$.

4) On rappelle et on ne demande pas de redémontrer que l'application de restriction aux sommets
$$G_T \to S_4 : f \mapsto f_{|\{t_0,t_1,t_2,t_3\}}$$
est un isomorphisme de G_T sur le groupe S_4 des permutations des sommets de T.

a) Quel est le nombre d'éléments de G_C?

b) En reprenant la figure de la question **1**) tracer, en justifiant vos traits et vos affirmations, le plan fixe et la direction d'une symétrie $s_{12} \in G_T$ telle que $s_{12}(t_1) = t_2$, $s_{12}(t_l) = t_l, l \neq 1, 2$.

c) Combien y-a-t-il de symétries $s_{ij} \in G_T$ qui permutent 2 sommets $t_i, t_j, i < j$, et fixent les deux autres sommets?

5)* a) En vous basant sur une propriété de S_4, expliquer pourquoi toute isométrie $f \in G_T$ est la composée de symétries $s_{ij} \in G_T$.

b) En vous basant sur la liste des éléments de S_4, faire la liste (justifiée) des éléments de G_T en précisant la nature géométrique de ces isométries.