On désigne par $\mathcal{A}$ un espace affine réel de direction V. L'exemple *par excellence* étant $\mathcal{A} = R^n$.

Barycentres

Pour $r+1$ points $p_0, p_1, \ldots, p_r \in \mathcal{A}$ et des réels $a_0, a_1, \ldots, a_r \in R$ vérifiant

$$\sum_{i=0}^{r} a_i \neq 0,$$

l'application $f : \mathcal{A} \to V$ définie par

$$m \mapsto \sum_{i=0}^{r} a_i \, \overrightarrow{mp_i}.$$

est une bijection.

Le *barycentre* des points pondérés $(p_i, a_i)_{0 \leq i \leq r}$ est l'unique point $s \in \mathcal{A}$ pour lequel

$$f(s) = 0 \in V.$$

Pour tout point $q \in \mathcal{A}$ on a

$$s = q + \frac{1}{\sum_{j=0}^{r} a_j} \sum_{i=0}^{r} a_i \, \overrightarrow{qp_i}.$$

Remarques et terminologie:

- l'expression explicite qui précède ne dépend pas du point q. En particulier on peut prendre $q = p_0$.

- dans le cours, j'utilise la notation

$$s = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_r \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_r \end{pmatrix}.$$

- pour tout $a \in R \setminus \{0\}$ on a

$$\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_r \\ a\,a_0 & a\,a_1 & \cdots & a\,a_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_r \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_r \end{pmatrix}.$$

- le barycentre

$$\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_r \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

est appelé l' *isobarycentre* de $(p_i)_{0 \leq i \leq r}$. En particulier

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est le point milieu du segment $[A, B]$.

Propriété 1: le barycentre est *associatif*, ce qui signifie:

pour toute partition

$$\{0, 1, \ldots, r\} = I_0 \cup I_1 \cup \cdots \cup I_q$$

vérifiant

$$\forall k \in \{0, \dots q\}, \ \sum_{i \in I_k} a_i \neq 0$$

on a

$$\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_r \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_q \\ \sum_{i \in I_0} a_i & \sum_{i \in I_1} a_i & \cdots & \sum_{i \in I_q} a_i \end{pmatrix}$$

où s_k est le barycentre des points pondérés $(p_i, a_i)_{i \in I_k}$.

Attention: l'*associativité* du calcul barycentrique est importante. Elle est souvent utilisée pour faire la preuve de propriétés d'incidence.

Par exemple (cf cours) l'assertion

- les 3 droites passant par les milieux des arètes opposées d'un tétraèdre de sommets A, B, C, D sont concourantes -

provient de

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} C & D \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} B & D \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} A & D \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} B & C \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Applications affines et barycentres

Propriété 2: Les applications affines conservent les barycentres, ce qui signifie:

Toute application affine $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ satisfait à

$$f(\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_r \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_r \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} f(p_0) & f(p_1) & \cdots & f(p_r) \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_r \end{pmatrix}$$

Bijections affines conservant une partie finie $P = \{p_0, p_1, \dots, p_r\} \subset \mathcal{A}$

Propriété 3:

- L'ensemble $G_P := \{f \in GA(\mathcal{A}),\, f(P) = P\}$ des bijections affines qui conservent P est un sous-groupe du groupe affine $GA(\mathcal{A})$.

- Pour toute $f \in G_P$,

$$f(\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_r \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_r \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque:

- dire qu'une bijection affine f conserve une partie P, ce que l'on écrit $f(P) = P$, signifie

$$\forall p \in P, f(p) \in P \, et \, f^{-1}(p) \in P.$$

Ceci *n'implique pas* que les points de P sont des points fixes de f.

Par exemple, la rotation ρ du plan R^2 de centre $(0,0)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ conserve l'ensemble des sommets

$$A=(1,0), B=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}), C=(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$$

du triangle équilatéral (cf les racines 3-ièmes de l'unité dans $C \simeq R^2$) sans fixer ceux-ci puisque

$$\rho(A)=B, \quad \rho(B)=C, \quad \rho(C)=A.$$

- La deuxième assertion de la propriété 3 est un exemple simple de *théorème de point fixe*: si la bijection affine f conserve P i.e. si f permute les points de P, alors f fixe l'isobarycentre des points de P. C'est un cas particulier de la propriété 2.

Exemple important de groupe conservant une partie finie: le groupe du tétraèdre.

Notons $T=\{p_1,p_2,p_3,p_4\}$ l'ensemble des sommets d'un tétraèdre (non aplati) de R^3. Le quadruplet (p_1,p_2,p_3,p_4) est alors une base affine de R^3.

Question: Quel est l'ordre du groupe G_T?

Soit $f \in G_T$. Comme $f(T)=T$, la restriction de f à T

$$f_T : T \to T$$

est une bijection de T sur T i.e. une permutation des quatre sommets du tétraèdre. Il existe donc une permutation $\sigma \in S_4$ telle que

$$\forall i \in \{1,2,3,4\}, \quad f(p_i)=p_{\sigma(i)} \qquad (\star)$$

La question est de savoir s' il y a autant d'éléments de G_T que de permutations de S_4.

Prenons une permutation $\sigma \in S_4$. Comme $(p_i)_{1\leq i\leq 4}$ est une base affine, on sait (cf le chapitre sur les applications affines) qu'il existe une et une seule application affine

$$f_\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

telle que

$$f_\sigma(p_i)=p_{\sigma(i)}.$$

Par définition f_σ conserve T. De plus f_σ est une bijection car elle envoie la base affine $(p_i)_{1\leq i\leq 4}$ sur la base affine $(p_{\sigma(i)})_{1\leq i\leq 4}$.

En conclusion: l'application

$$G_T \to S_4 : f \mapsto \sigma$$

qui à f associe la permutation donnée par $(\star)$ est une bijection de réciproque $\sigma \mapsto f_\sigma$.

En fait, cette application est un isomorphisme de groupes: si $f \mapsto \sigma$ et $f' \mapsto \sigma'$ on a

$$(f' \circ f)(p_i)=f'(p_{\sigma(i)})=p_{\sigma'(\sigma(i))},$$

i.e. $f' \circ f \mapsto \sigma' \circ \sigma$.

Réponse: Etant isomorphe à S_4, le groupe G_T du tétraèdre est d'ordre $\mid S_4 \mid = 4! = 24$.

Remarques:

- ce qui précède est vrai, avec la même preuve, en toute dimension n:

Pour toute base affine $(p_1, \ldots, p_{n+1})$ de R^n le groupe G_P des bijections affines qui conservent la partie $P = \{p_1, \ldots, p_{n+1}\}$ est isomorphe au groupe des permutations S_{n+1}.

En particulier, le groupe des bijections affines du plan R^2 qui conservent les sommets d'un triangle est isomorphe à S_3.

La situation est très différente pour les polygones du plan à $n \geq 4$ sommets car ces sommets ne forment plus une base affine du plan. Par exemple, le groupe du carré G_C est d'ordre 8. (En général le groupe du polygone régulier du plan à $n \geq 3$ côtés, appelé le *groupe diédral* est d'ordre $2n$. Observez que $2n = | S_n | = n!$ ssi $n = 3$. Pour $n \geq 4$, certaines permutations des sommets du polygone ne sont pas les restrictions à l'ensemble des sommets d'une bijection affine du plan.)

Convexité

Soient $p, q \in \mathcal{A}$. Le *segment*

$$[p, q] = \left\{ \begin{pmatrix} p & q \\ 1-t & t \end{pmatrix}, t \in [0,1] \right\}$$

est l'ensemble des barycentres des points pondérés (p, a) et (q, b) avec $a \geq 0, b \geq 0, a + b \neq 0$.

Une partie $C \subset \mathcal{A}$ est dite *convexe* si

$$\forall (p, q) \in C^2, \quad [p, q] \subset C.$$

Propriétés:

- l'intersection $C \cap C'$ de parties convexes C et C' est convexe
- l'image $f(C)$ d'une partie convexe C par une application affine f est convexe.
- l'image réciproque $f^{-1}(C')$ d'un convexe C' par une application affine f est convexe.

Enveloppe (ou clôture) convexe d'une partie finie $P \subset \mathcal{A}$.

On appelle *enveloppe convexe* de P la plus petite partie convexe (pour l'inclusion) de $\mathcal{A}$ contenant P. C'est l'intersection des parties convexes de $\mathcal{A}$ contenant P.

Je note $[P]$ l'enveloppe convexe de P.

Proposition: soit $P = \{p_0, p_1, \ldots, p_r\}$. On a

$$[P] = \left\{ \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_r \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_r \end{pmatrix}, a_i \geq 0, \sum_{i=0}^{r} a_i \neq 0 \right\}$$

i.e. l'enveloppe convexe de P est l'ensemble des *barycentres des points pondérés* $(p_i, a_i)_{0 \leq i \leq r}$ *à poids* a_i *positifs.*

Remarque: la preuve de cet énoncé très utile (cf tds) utilise une récurrence sur le nombre $r \geq 2$ de points de P.

La conservation des barycentres (propriété 2 plus haut) nous donne immédiatement:

Corollaire: soit $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ une application affine. On a

$$f([P]) = [f(P)].$$

En mots: l'image par f de l'enveloppe convexe de $\{p_0, \ldots, p_r\}$ est l'enveloppe convexe des points images $\{f(p_0), \ldots, f(p_r)\}$.

Exemple: soient A, B, C, D les quatre sommets d'un tétraèdre.
L'enveloppe convexe $[A, B, C, D]$ est le tétraèdre plein.

Par le corollaire, toute bijection affine f conservant l'ensemble des sommets $\{A, B, C, D\}$ conserve aussi le tétraèdre plein $[A, B, C, D]$.