Corrigé du Partiel du 5 avril 2012

Exercice 1.

1. Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ éléments de $M_2(K)$, la forme polaire du determinant

$$\begin{aligned} b(M, M') &= \frac{1}{2}(det\,(M + M') - det\, M - det\, M') \\ &= \frac{1}{2}(ad' + a'd - cb' - c'b) \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire sur $M_2(K)$. Sa restriction au sous-espace $sl_2(K)$ l'est aussi et

$$det : sl_2(K) \to K : M \mapsto det(M) = b(M, M)$$

est (par définition) une forme quadratique.

2. Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in sl_2(K)$, $q(M) = -det(M) = a^2 + bc$ et

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{pmatrix} = (a^2 + bc)I_2 = q(M)I_2.$$

3. On reprend le calcul de la forme polaire en utilisant 2:

$$\begin{aligned} b(M, M')I_2 &= \frac{1}{2}(q(M + M')I_2 - q(M)I_2 - q(M')I_2) \\ &= \frac{1}{2}((M + M')^2 - M^2 - M'^2) \\ &= \frac{1}{2}(MM' + M'M). \end{aligned}$$

En particulier, $b(M, M') = 0 \Leftrightarrow MM' + M'M = 0$. (On dit que M et M' anticommutent.)

4. Supposons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$ nilpotente, i.e. supposons qu'il existe $k \in N \setminus \{0\}$ tel que $M^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$(det\, M)^k = det\, M^k = 0$ donne $det\, M = 0$, i.e. $ad = bc$. Ensuite,

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(a + d) & b(a + d) \\ c(a + d) & d(a + d) \end{pmatrix} = (tr\, M)\, M.$$

On a donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = M^k = (tr\, M)^k M$$

qui implique $tr\, M = 0$.

Conclusion: toute matrice nilpotente $M \in M_2(K)$ satisfait $tr\, M = 0 = det\, M$ i.e. est élément du cône isotrope $Co(q) \subset sl_2(K)$. Le même calcul montre que toute matrice de $Co(q) \subset sl_2(K)$ est nilpotente.

Exercice 2.
Les sous-espaces F et G satisfont à $G \subset F$, $A = A \cap Ker\,(b) \oplus G$, $E = Ker\,(b) \oplus F$.
1. Les 2 sommes directes nous permettent d'écrire tout $a \in A$ sous la forme $a = l + g$, $l \in Ker(b) \cap A, g \in G$ et tout $u \in E$ sous la forme $u = k + f$, $k \in Ker(b), f \in F$ et on a

$$b(u, a) = b(k + f, l + g) = b(f, g).$$

Dès lors $u = k + f \in A^{\perp}$ ssi $\forall g \in G, b(f, g) = 0$ ssi $f \in G' \subset F$.
Conclusion: $A^{\perp} = Ker(b) \oplus G'$.
2. Comme F est supplémentaire de $Ker(b)$ dans E la restriction b_F de b à F est non dégénérée. On a donc (cf cours)

$$\dim G + \dim G' = \dim F. \quad (\star)$$

Pour obtenir la dimension du sous-espace $A^{\perp}$ on utilise $(\star)$ et les 3 sommes directes de l'exercice:

$$\begin{aligned}\dim A^{\perp} &= \dim Ker(b) + \dim G' \\ &= \dim Ker(b) + \dim F - \dim G \\ &= \dim E - \dim F + \dim F - \dim G \\ &= \dim E - \dim A + \dim A \cap Ker(b).\end{aligned}$$

3. Si b est nulle sur $E \neq \{0\}$, i.e si $Ker(b) = E$, on a $A^{\perp} = E$ pour tout sous-espace $A \subset E$. Dans ce cas, aucun sous-espace $B \subset E$ avec $B \neq E$, n'est l'orthogonal d'un sous-espace $A \subset E$.

Exercice 3.
On considère l'application

$$H : V \times V^{\star} \to K : (x, f) \mapsto 2f(x).$$

Conseil: Il faut veiller à bien identifier la situation: il s'agit d'une application $q : E \to K$ où E est l'espace $V \times V^{\star}$ (pour la loi additive $(x, f) + (y, g) = (x + y, f + g)$) et q est l'application H.
1. Commençons par la forme polaire:

$$\begin{aligned}b((x, f), (y, g)) &= \frac{1}{2}(H(x + y, f + g) - H(x, f) - H(y, g)) \\ &= \frac{1}{2}(2(f + g)(x + y) - 2f(x) - 2g(y)) \\ &= f(y) + g(x).\end{aligned}$$

La forme

$$b : (V \times V^{\star}) \times (V \times V^{\star}) \to K$$

est bien bilinéaire et $H(x, f) = b((x, f), (x, f))$.
2. La matrice de H est celle de b.
On a

$$\begin{aligned}b((e_i, 0), (e_j, 0)) = 0 = b((0, e_i^{\star}), (0, e_j^{\star})) \\ b((e_i, 0), (0, e_j^{\star})) = e_j^{\star}(e_i) = \delta_{ij}\end{aligned}$$

où $\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ et $\delta_{ii} = 1$.

La matrice $M \in M_{2n}(K)$ de H s'écrit

$$M = \begin{pmatrix} O & I_n \\ I_n & O \end{pmatrix}$$

où $O \in M_n(K)$ est la matrice nulle et $I_n \in M_n(K)$ est la matrice identité.

3. Le cône isotrope $Co(H)$ de H est l'ensemble des couples (x, f) tels que $H(x, f) = 0$. Par le 2. les sous-espaces $Vect((e_i, 0)_{1\leq i\leq n})$ et $Vect((0, e_i^\star)_{1\leq i\leq n})$ sont inclus dans $Co(H)$.

4. Par le 2. on a $Vect((e_k, 0), (0, e_k^\star)) \perp Vect((e_l, 0), (0, e_l^\star))$ pour $k \neq l$.

5. On suppose V de dimension 1 de base e et on désigne par q la forme quadratique $q : K^2 \to K : (x, y) \mapsto xy$. L'application

$$\phi : V \times V^\star \to K^2 : (xe, ye^\star) \mapsto (x, y)$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels pour lequel

$$H(xe, ye^\star) = xy\, e^\star(e) = xy = (q \circ \phi)(xe, ye^\star).$$

De même, l'application

$$K^2 \to D_2(K) : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels pour lequel

$$q(x, y) = xy = det \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}.$$