CHAPITRE 4
ELEMENTS DE GEOMETRIE AFFINE

I. Espace affine.

DEFINITION 45 : ESPACE AFFINE

Un ensemble $\mathcal{E}$ est un espace affine s'il existe un espace vectoriel E et une application

$$\Omega: \begin{array}{c} \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathcal{E} \\ (A,B) \to \overrightarrow{AB} \end{array}$$

et vérifie :

i. $\Omega_{\mathrm{A}}: \begin{array}{c} \mathcal{E} \to E \\ M \to \overrightarrow{AM} \end{array}$ est une bijection

ii. $\forall\ A,B,C\ \in \mathcal{E}\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

Exemple :

1) $\mathbb{R}^n$ espace affine

$$\Omega: \begin{array}{c} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ (x,y) \to y - x \end{array}$$

- $\Omega_{\mathrm{x}}: y \to y - x$ bijection
- Chasles est vérifié.

2) Système équations linéaires

$A \in M_{n\times m}, y \in \mathbb{R}^n$

$\mathcal{E} = \{x \in\ \mathbb{R}^m, Ax = y\}$ est un espace affine.

$E = \{x \in\ \mathbb{R}^n, Ax = 0\}$ est un espace vectoriel.

$$\begin{array}{c} \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to E \\ (x_1, x_2) \to x_2 - x_1 \end{array}$$

On dit que E est la direction de $\mathcal{E}$.

$\mathcal{E} = \{(x,y), x + y = 1\}$

$E = \{(x,y), x + y = 0\}$

Rmq :

- Chasles

  $\overrightarrow{AA} = 0_E$

  $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

- $A \in\ \mathcal{E}, \vec{u} \in E$ alors il existe un unique $M \in\ \mathcal{E}$

  tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ car Ω_{A} bijective $\Omega_{\mathrm{A}}: \begin{array}{c} \mathcal{E} \to E \\ M \to \overrightarrow{AM} \end{array}$

DEFINITION 46 : SOUS-ESPACE AFFINE

Un ensemble $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ est un sous-espace affine s'il est vide ou s'il existe un espace vectoriel $A \in \mathcal{F}$ tel que $\Omega_{\mathrm{A}}(\mathcal{F}) = \mathrm{F}$ où F est un sous-espace vectoriel de E.

Rmq :
F ne dépend pas de A, en effet $\forall B \in \mathcal{F}, \Omega_{\mathrm{B}}(\mathcal{F}) = \mathrm{F}$

PROPOSITION :

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E.
Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace vectoriel par E.
Il existe un unique ss-espace affine $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ dirigé par F contient un point donné A.

PREUVE:

$\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{E}, \overrightarrow{AM} \in F\}$
On a bien $\Omega_{\mathrm{A}}(\mathcal{F}) = \mathrm{F}$

DEFINITION 47 : DIMENSION D'UN ESPACE AFFINE

La dimension d'un espace affine est la dimension de l'espace vectoriel qui le dirige.
droite affine = espace affine de dimension 1.
plan affine = espace affine de dimension 2.
hyperplan affine = espace affine de dimension $n-1$.

Rmq :
$\mathcal{E} = \{A\}$ espace affine de dim 0.

PROPOSITION :

L'intersection des sous-espace affines de $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$.
Il est dirigé par l'intersection des directions des sous-espaces affines.

PREUVE:

$\cap_{i\in I} \mathcal{F}_i$
$\mathcal{F}_i$ sous espace affine dirigé par F:

- Si l'intersection est vide c'est un espace affine.
- Sinon soit $A \in \cap_{i\in I} \mathcal{F}_i$: $\Omega_{\mathrm{A}}(\cap_{i\in I} \mathcal{F}_i) = \cap_{i\in I} F_i$

Soit $M \in \cap_{i\in I} \mathcal{F}_i$
$\Longrightarrow \forall i \in I, M \in \mathcal{F}_i$
$\Longrightarrow \forall i \in I, \Omega_{\mathrm{A}}(M) \in \mathcal{F}_i$
$\Longrightarrow \forall i \in I, \Omega_{\mathrm{A}}(M) \in \cap_{i\in I} \mathcal{F}_i$

Rmq :
« Postulat des parallèles »

« Pour tout point d'un espace affine il existe une unique droite $\underbrace{//}_{\text{même direction}}$ à un une droite donnée »

PREUVE:

$A \in \mathcal{E}$

$\mathcal{D}$ droite affine, D sa direction la droite cherchée est

$$\mathcal{D}' = \{M \in \mathcal{E}, \overrightarrow{AM} \in D\}$$

DEFINITION 48 : ESPACE AFFINE EUCLIDIEN

Un espace affine euclidien est un espace affine dirigé par un espace euclidien.

On peut définir dans ce cas la distance $d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\|$

DEFINITION 49 : SOUS ESPACE AFFINE

On définit un sous-espace affine engendré par une famille de points de $\mathcal{E}$ comme le plus petit sous-espace affine qui contient ces points.

DEFINITION 50 : INDEPENDANCE AFFINE

$\mathcal{E}$, ... $(A_0, \dots, A_k)$ famille de points de E. Ils sont affines indépendants si la dimension de l'espace affine engendré par ces points est k.

On dit que $(A_0, \dots, A_k)$ est un repère de ce sous-espace affine engendré.

Rmq :

Si $(A_0, \dots, A_k)$ est un repère de $\mathcal{F}$

$(\overrightarrow{A_0A_1}, \dots, \overrightarrow{A_0A_k})$ est une base de F la direction de $\mathcal{F}$

II. Application affines

DEFINITION 51 :

$\mathcal{E}, \mathcal{F}$ espaces affines dirigés par E,F respectivement $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est affine. Si $\exists\ O \in \mathcal{E}$, ∃ f application linéaire $f : E \to F$ tel que $\forall\ M \in \mathcal{E}$, $\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)} = f(\overrightarrow{OM})$.

Rmq :

g ne dépend pas de O' en effet si $O' \in \mathcal{E}$.

$$\overrightarrow{\varphi(O')\varphi(M)} = \overrightarrow{\varphi(O')\varphi(O)} + \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)}$$

$$\overrightarrow{\varphi(O')\varphi(M)} = -\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(O')} + \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)}$$

$$\overrightarrow{\varphi(O')\varphi(M)} = -f(\overrightarrow{OO'}) + (\overrightarrow{OM})$$

$$\overrightarrow{\varphi(O')\varphi(M)} = f(-\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OM})$$

$$\overrightarrow{\varphi(O')\varphi(M)} = f(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OM})$$

$$\overrightarrow{\varphi(O')\varphi(M)} = f(\overrightarrow{O'M})$$

On note souvent $f = \vec{\varphi}$

PROPOSITION :

i. $\varphi: \mathcal{E} \to \mathcal{F}, \psi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ application affine associée alors $\psi \, o \, \varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{G}$ application affine et $\overrightarrow{\psi \, o \, \varphi} = \vec{\psi} \; o \; \vec{\varphi}$

ii. φ est une application affine est $\left\{ \begin{matrix} inj \; ssi \; \vec{\varphi} \; est \; injective \\ surj \; ssi \; \vec{\varphi} \; est \; surjective \\ bij \; ssi \; \vec{\varphi} \; estbijective \end{matrix} \right\}$

iii. Si φ est bijective, φ^{-1} est une application affine, $\overrightarrow{\varphi^{-1}} = (\vec{\varphi})^{-1}$.

PREUVE:

ii/ inj Supposons $\varphi(A) = \varphi(B)$.

$O_E = \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \vec{\varphi}(\overrightarrow{AB})$.

- Si $\vec{\varphi}_{inj} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Longrightarrow A = B$
  $\Longrightarrow \vec{\varphi}_{inj}$
- Supposons que $\vec{\varphi}\,(\vec{u}) = \vec{\varphi}\,(\vec{v})$
  $\exists! \; M, M', \vec{u} = \overrightarrow{OM}, \vec{v} = \overrightarrow{OM'}$
  $\vec{\varphi}\,(\vec{u}) = \vec{\varphi}\,(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)}$
  $\vec{\varphi}\,(\vec{v}) = \vec{\varphi}\,\left(\overrightarrow{OM'}\right) = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M')}$
  donc $\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M)} = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(M')}$
  $\Longrightarrow \varphi\,(M) = \varphi\,(M')$
  $\Longrightarrow M = M'$ car φ inj.
  $\Longrightarrow \vec{u} = \vec{v}$

COROLAIRE :

1. L'ensemble des applications affines bijectives de $\mathcal{E}$ dans lui-même est un groupe. On le note $GA(\mathcal{E})$
2. L'application $\begin{matrix} GA(\mathcal{E}) \to GL(E) \\ \varphi \mapsto \vec{\varphi} \end{matrix}$ surjectif, le noyau sont les translations

   $M \in \mathcal{E}, \varphi: \begin{matrix} \mathcal{E} \to \mathcal{E} \\ M \mapsto M' \end{matrix}, O\overrightarrow{\varphi(M)} = \vec{\varphi}(\overrightarrow{OM})$

III. Isométries.

$\mathcal{E}, \mathcal{F}$ espaces affines euclidien.

DEFINITION 52 : ISOMETRIE AFFINE

Une application affine $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est une isométrie affine si $d\big(\varphi(A), \varphi(B)\big) = d(AB)$

$\left\|\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}\right\| = \|\overrightarrow{AB}\|$

$\left\|\overrightarrow{\varphi(AB)}\right\| = \|\overrightarrow{AB}\|$

$\vec{\varphi}$ est orthogonale $\in O(E)$

Exemple :

1/ Symétrie affine par rapport à $\mathcal{F}$ orthogonale à φ.

2/ Translations.

THEOREME :

Toute isométrie affine φ s'écrit de façon unique

$$\varphi : t_{\vec{u}}\ o\ \psi$$

où $\vec{u}$ vecteur invariant par $\vec{\varphi}$, ψ isométrie affine qui possède au moins un point fixe.