CHAPITRE 3
ESPACES EUCLIDIENS

I. Définitions.

DEFINITION 32 : ESPACE EUCLIDIEN

Un espace euclidien est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'une forme bilinéaire symétrique définie positive. On la note $(x, y) \longmapsto (x|y) \; ou \; \langle x, y\rangle$ et on l'appelle produit scalaire.

PROPOSITION 32 : INEGALITE DE CAUCHY-SCHARWZ

Soit (E, q) un espace euclidien

1) $\forall \, x, y \in E, (x|y)^2 = q(x)q(y)$
2) On a égalité ssi x et y colinéaires.

Exemple :

1) $\mathbb{R}^n$ avec $(x|y) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ où $x = (x_1, \ldots, x_n)$ $y = (y_1, \ldots, y_n)$
2) Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $(A, B) \longmapsto tr({}^tAB)$

   On note $\forall x \in E$ (espace euclidien), $\|x\| = \sqrt{q(x)}$ on l'appelle la norme de x.

Rmq : i) est vraie si (E, q) esp.quadra. réel positif.

PREUVE:

i. $f: t \longmapsto q(x)t^2 + 2(x|y)t + q(y) = q(tx + y)$

   comme $q > 0$, $q(tx + y) > 0 \; si \; tx + y \neq 0$
   donc $\Delta(f) < 0$ c'est-à-dire $4(x|y)^2 - 4q(x)q(y) < 0$
   $4((x|y)^2 - q(x)q(y)) < 0$ donc $(x|y)^2 < q(x)q(y)$

   si $q(x) = 0$
   $2(x|y)t + q(y) \geq 0$
   implique $f(t)$ constante et donc$(x|y) = 0$ et l'inégalité voulue est évidente.

ii. Réciproquement, si $(x|y)^2 = q(x)q(y)$
   - Si $q(x) = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow$ x et y $colinéaires$
   - Si $q(x) \neq 0$ $\Delta(f) = 0$ donc $\exists \; t_0 \; ; f(t_0) = 0$
     $q(t_0x + y) = 0 \;\; \Longrightarrow t_0x + y = 0$
     $\Longrightarrow x \; et \; y \; colinéaires$

PROPOSITION 33 : INEGALITE MINKWOSKI

Soit (E, q) un espace euclidien alors $\forall \, x, y \in E$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

PREUVE:

On montre $q(x+y) \leq \left(\sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}\right)^2$

PROPOSITION 34 :

Si q positive alors $Ker\ q = Co(q)$

PREUVE:

On sait déjà que $Ker(q) \subset Co(q)$.
Prenons $x \in Co(q)$ alors $q(x) = 0$
On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz
$\forall\ y \in E\ b(x,y)^2 \leq q(x)q(y) = 0$ ici
donc $b(x,y) = 0\ \forall\ y \in E$ donc $\forall\ x \in Ker\ (q)$

II. Orthogonalité, bases orthonormales.

E espace euclidien
$(.\,|\,.)$ est non dégénérée.

Rappel :

1) $F \ \bigoplus F^{\perp} = E$ (Rem : $F\ et\ F^{\perp}$ sont orthogonaux) $\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F$
2) $(F^{\perp})^{\perp} = F$
3) $F \ \subset G \Leftrightarrow G^{\perp} \subset F^{\perp}$
4) $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$
   $(F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$

DEFINITION 33 : BASE ORTHONORMALE

On appelle une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E orthonormale si elle est orthogonale et $\forall\ i = 1, \dots, n\ q(e_1) = 1$

PROPOSITION 35 :

Toute espace euclidien a une base orthonormale

1) Procédé d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt
   $(e_1, \dots, e_n)$ base de E.
   On fabrique une nouvelle base par récurrence de la façon suivante :
   $E_1 = e_1$ $\qquad\qquad$ $E_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$
   $E_2 = e_2 - \lambda_{1,2}E_1$ $\qquad\qquad$ $E_2 = \frac{e_2 - \lambda_{1,2}E_1}{\|e_2 - \lambda_{1,2}E_1\|}$
   ⋮
   $E_n = e_n - \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{j,n} E_j$ $\qquad$ où $\lambda_{j,n} = \frac{(E_j|e_i)}{\|E_j\|^2}$

2) Projections et symétrie orthogonales.

DEFINITION 34 : LA PROJECTION ORTHOGONALE

F ss-ev de E. La projection orthogonale par rapport à F, c'est la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$. $F \oplus F^{\perp} = E$.

$x \in E,\ x = \underbrace{P_F(x)}_{projection} + \underbrace{ort_F(x)}_{orthogonal}$ $\quad \begin{matrix} P_F(x) \in F \\ ort_F(x) \in F^{\perp} \end{matrix}$

c'est-à-dire l'application :

$$P_F : \begin{matrix} E \to F \\ x \mapsto P_F(x) \end{matrix}$$

DEFINITION 35 : LA SYMETRIE ORTHOGONALE

La symétrie orthogonale par rapport à F c'est l'application

$$S_F : \begin{matrix} E \to F \\ x \mapsto P_F(x) - ort_F(x) \end{matrix}$$

PROPOSITION 36 :

$(e_1, \dots, e_n)$ base orthogonale de F alors

$$P_F = \sum_{i=1}^{r} \frac{(x|e_i)}{\|e_i{}^2\|} e_i$$

et

$$S_F = 2 \sum_{i=1}^{r} \frac{(x|e_i)}{\|e_i{}^2\|} e_i - x$$

PREUVE:

1) Si $x \in F$, $x = \sum_{i=1}^{r} x_i e_i$ alors $P_F = \sum_{i=1}^{r} \frac{\left(\sum_{j=1}^{r} x_j e_j \middle| e_i\right)}{\|e_i\|^2} e_i = \sum_{i=1}^{r} \frac{(x_i e_i|e_i)}{\|e_i\|^2} e_i$

$$P_F = \sum_{i=1}^{r} x_i e_i = x$$

Si $x \in F^{\perp}$ alors $P_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \frac{(x|e_i)}{\|e_i\|^2} = 0$

2) Même méthode en posant $x \in F$ alors $S_F(x) = x$ et $x \in F^{\perp}$ alors $S_F(x) = -x$.

Rmq :

Dans une base orthogonale

$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) = \sum x_i y_i$

THEOREME 37 :

$(e_1, \dots, e_n)$ base de E

Il existe une base orthogonale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E et

$\forall\ k = 1, \dots, n\ Vect(e_1, \dots, e_k) = Vect(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$.

PREUVE:

$\varepsilon'_k = e_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle \varepsilon'_j, e_k \rangle}{\|e_j'\|^2} \varepsilon'_j$

$\varepsilon_k = \frac{\varepsilon'_k}{\|\varepsilon'_k\|}$

$V_k = Vect(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_k)$

$\varepsilon'_1 = e_1$

$\varepsilon'_2 = e_2 - \frac{\langle \varepsilon'_1, e_2 \rangle}{\|e_1'\|^2} \varepsilon'_1 = e_2 - P_{V_1}(e_2) = ort_{v_1}(e_2) \in V_1^{\perp}$

donc $\varepsilon'_1 \perp \varepsilon'_2$

On aura

$$Vect(e_1, e_2) = Vect(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

En général $\forall\ k = 2, \dots, n$

$\varepsilon'_k = e_k - P_{V_{k-1}}(e_k) = ort_{v_{k-1}}(e_k) \in V_{k-1}^{\perp}$

$(\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n)$ est orthogonale et

$$Vect(e_1, e_2) = Vect(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \left(\frac{\varepsilon'_1}{\|\varepsilon'_1\|}, \dots, \frac{\varepsilon'_n}{\|\varepsilon'_n\|}\right).$

DEFINITION 36 : MINEURS PRINCIPAUX

A=$(a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$

$\delta_k, k - ième$mineur principal de A est défini par $\delta_k = \det((a_{ij})_{1 \le i,j \le k})$

PROPOSITION 37 : GRAMM-SCHMIDT

E : espace euclidien, A matrice de (|) dans une base $(e_1, \dots, e_n)$. Alors il existe une base $(f_1, \dots, f_n)$ tel que :

1) $(f_1, \dots, f_n)$ orthogonale
2) $Vect(f_1, \dots, f_n) = Vect(e_1, \dots, e_n)\ \forall\ k = 1, \dots, n$

La matrice associée à q est diagonale $\begin{pmatrix} \delta_1 & & & \\ & \delta_2/\delta_1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \delta_n/\delta_{n-1} \end{pmatrix}$ autrement dit

$\|f_k\|^2 = \frac{\delta_k}{\delta_{k-1}}.$

EXEMPLE IMPORTANT DE PROJECTION ET SYMETRIE ORTHOGONALE

Si F est une droite $(dim = 1)$ ou un hyperplan$(\dim = n - 1)$ Soit $a, b \in E$, $F = Vect(a)$

Soit H un hyperplan, $H^{\perp} = Vect(b)$

$\boldsymbol{P_F(x) = \frac{(x|a)}{\|a\|^2} a}$ $\boldsymbol{x = P_F(x) + ort_F(x)}$ $\boldsymbol{P_H(x) = x - \underbrace{\frac{(x|b)}{\|b\|^2} b}_{ort_H(x)}}$

$\boldsymbol{S_F(x) = \frac{2(x|a)}{\|a\|^2} a - x}$ $\boldsymbol{S_H(x) = x - \frac{2(x|b)}{\|b\|^2} b \ (= P_H(x) - ort_H(x))}$

3) Matrices orthogonales

E espace euclidien $(e_1, \dots, e_n)$ base orthogonale $(donc\ q\ représentée\ par\ I_n)$

$Soit$ $(e'_1, \dots, e'_n)$ une autre base orthonormale

Soit O la matrice de passage de $(e_1, \dots, e_n) = \beta_1$ à $(e'_1, \dots, e'_n) = \beta_2$.

$$M_{B_2}(q) = {}^tOM_{B_1}(q)O$$

Alors $I_n = {}^tOO$.

PROPOSITION 38 :

On a équivalence pour $O \in M_n(\mathbb{R})$

1) ${}^tOO = I_n$.
2) $O\,{}^tO = I_n$
3) O est la matrice de passage d'une base orthonormale dans une autre.

DEFINITION 37 : MATRICES ORTHOGONALES

On dit que $O \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si elle satisfait une des conditions 1), 2) ou 3).

On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales.

PROPOSITION 39 :

$O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$

PREUVE:

$O_1, O_2 \in O_n(\mathbb{R})$

1) ${}^t(O_1O_2)O_1O_2 = {}^tO_2\,\underbrace{{}^tO_1O_1}_{I_n}\,O_2 = {}^tO_2O_2 = I_n$
2) $I_n \in O_n(\mathbb{R})$
3) $O \in O_n(\mathbb{R})$ $\qquad O^{-1} = {}^tO$

   ${}^t({}^tO)\,{}^tO = O\,{}^tO = I_n$

PROPOSITION 40 : FACTORISATION

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$

Il existe une matrice triangulaire supérieure R et une matrice orthogonale Q telles que

$$A = QR$$

PREUVE:

On introduit un espace euclidien de dimension n et B_0 une base orthogonale pour le produit scalaire de E.

Soit B_1 une base de E telle que A est la matrice de passage de B_0 à B_1. On applique Gramm-Schmidt à la base B_1 on obtient une base orthonormale B_2.

Soit T la matrice de passage de B_1 à B_2, elle est triangulaire supérieure

$$\left.\begin{array}{l} B_1 = (e_1, \dots, e_n) \\ B_2 = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \end{array}\right\} et\ Vect(e_1, \dots, e_k) = Vect(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$$

$$\varepsilon_1 = \lambda_{11}e_1 = \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{22} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots \varepsilon_n = \begin{pmatrix} \lambda_{1n} \\ \vdots \\ \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \cdots & \lambda_{1n} \\ 0 & \lambda_{22} & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

Soit Q la matrice de passage de B_0 à B_2, donc orthogonale.

$$Q = AT$$
$$A = QT^{-1} = QR$$

III. Adjoint d'un endomorphisme.

E espace euclidien, u un endomorphisme de E.

$$(x, y) \longmapsto (x|u(y))$$

C'est une application bilinéaire.

PROPOSITION 41 :

L'application φ: $\begin{matrix} End(E) \to Bil(E \times E, \mathbb{R}) \\ u \longmapsto \varphi(u): \begin{matrix} E \times E \to \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto (x|u(y)) \end{matrix} \end{matrix}$

est un isomorphisme.

PREUVE:

B base de E.

A la matrice du produit scalaire de E dans cette base.

Soit $X, Y \in E$ et x, y leurs coordonnées dans B et M la matrice de u dans B.

Alors $(x, y) \longmapsto (x|u(y))$ s'écrit

$$^{t}XA(MY) = {}^{t}X(AM)Y$$

L'application φ s'écrit matriciellement

$$\begin{matrix} M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto AM \end{matrix}$$

A est inversible donc φ est un isomorphisme.

Rmq :

- Si B est orthonormale, $A = I_n$. Les matrices de u et de $(x, y) \longmapsto (x|u(y))$ sont les mêmes.
- Si $\varphi(u) = b$ on dira que u est l'endomorphisme associée à b, i.e. $b(x, y) = \left(x\middle|u(y)\right)$

DEFINITION 38 : ADJOINT

Soit $u \in End(E)$

L'endomorphisme associé à $(x, y) \longmapsto (x|u(y))$ est noté u^* est appelé adjoint de u.

$$(u(x)|y) = (x|u^*(y))$$

Rmq :

- $(x, y) \longmapsto (x|u(y))$ est symétrique ssi $u = u^*$
- $(x, y) \longmapsto (x|u(y))$ est antisymétrique ssi $u^* = -u$

DEFINITION 39 : SYMETRIE,ANTISYMETRIE, NORMALITE DE L'ADJOINT

Soit $u \in End(E)$

- On dit que u est symétrique si $u = u^*$
- On dit que u est antisymétrique si$-u = u^*$
- On dit que u est normal si $u \; o \; u^* = u^* \; o \; u$

Rmq :

1) Les endomorphismes symétriques ou antisymétriques sont normaux.
2) $u \in GL(E)$ tel que $u^* = u^{-1}$
   $\forall \; x, y \in E, \; (x|u(y)) = (u^{-1}(x)|y)$
   $\forall \; z, y \in E, \; (u(z)|u(y)) = (z|y)$

DEFINITION 40 : ADJOINT POSITIF, NEGATIF, DEFINIT POSITIF, DEFINIT NEGATIF

Soit $u \in End(E)$ symétrique.
On dit que u est défini positif (resp positif, déf négatif, négatif)
si $(x, y) \longmapsto (x|u(y))$ est défini positive (resp positive, déf négative, négative)

PROPOSITION 42 :

Soit $u \in End(E)$ symétrique, représentée par une matrice A dans une base orthonormale.
Alors A est définie positive (resp positive, déf négative, négative) ssi u est définie positive (resp positive, déf négative, négative)